

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ В ДВОИЧНОЙ СИСТЕМЕ СЧИСЛЕНИЯ

М.С. Маслов, О.Е. Ролдугин
randomOleg01@yandex.ru

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный лесотехнический университет
имени Г.Ф. Морозова»

Аннотация. При написании данной работы был проведен комплексный анализ выбранной темы. Была изучена соответствующая литература по арифметическим операциям в двоичной системе счисления. Примеры и вычисления проводились с учетом их возможного применения на практике. Рассматривались различные способы выполнения сложения, вычитания, умножения и деления в двоичной системе.

Ключевые слова: двоичная система, арифметические операции, сложение, вычитание, умножение, деление.

ARITHMETIC OPERATIONS IN THE BINARY NUMBER SYSTEM

M.S. Maslov, O.E. Roldugin
randomOleg01@yandex.ru

Voronezh State University of Forestry and Technologies named after G.F. Morozov

Abstract. In this work, a comprehensive analysis of the selected topic was carried out. The relevant literature on arithmetic operations in the binary number system was studied. Examples and calculations were performed considering their potential practical applications. Various methods of binary addition, subtraction, multiplication, and division were examined.

Keywords: binary system, arithmetic operations, addition, subtraction, multiplication, division.

Введение

Двоичная система счисления является основой работы компьютеров и цифровых устройств. Это объясняется тем, что в двоичной системе используются для записи всего лишь две цифры: 0 и 1. С помощью этих значений можно очень удобно выразить соответственно, отсутствие или наличие сигнала в устройстве. Таким образом, можно сказать, что в цифровых устройствах для обработки какой-либо информации используются операции в двоичной системе. И для того, чтобы иметь понимание работы этих устройств, надо уметь проводить операции с двоичными числами.

Арифметические (бинарные) операции в двоичной системе счисления представляют собой обычные математические операции: сложение, умножение,

Представление двоичных чисел

В двоичной системе числа могут быть представлены в двух видах: с фиксированной точкой и плавающей точкой. Числа с фиксированной точкой – это привычное нам дробное число, в котором деление на целую и дробную часть производится по разрядам. Так, например число 123.625 можно перевести в двоичную используя остаток от деления сначала целой части, а дробной – умножением на основание 2:

В двоичной системе числа могут быть представлены в двух видах: с фиксированной точкой и плавающей точкой. Числа с фиксированной точкой – это привычное нам дробное число, в котором деление на целую и дробную часть производится по разрядам. Так, например число 123.625 можно перевести в двоичную используя остаток от деления сначала целой части, а дробной – умножением на основание 2:

$$\begin{array}{r}
 123 \overline{) 2} \\
 \underline{122} \\
 1 \overline{) 61} \\
 \underline{60} \\
 1 \overline{) 30} \\
 \underline{30} \\
 0 \overline{) 15} \\
 \underline{14} \\
 1 \overline{) 7} \\
 \underline{6} \\
 1 \overline{) 3} \\
 \underline{2} \\
 1 \overline{) 2} \\
 \underline{1} \\
 1 \overline{) 1} \\
 \underline{0} \\
 1 \overline{) 0} \\
 \underline{0} \\
 1
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 \times 0.625 \\
 \hline
 2 \\
 1.25 \\
 2 \\
 0.5 \\
 2 \\
 1.0
 \end{array}$$

Двоичное число с плавающей точкой, в свою очередь, записывается в общем случае в виде

где М – мантисса (выражение значения числа без учета порядка);

p – порядок.

Двоичное сложение

1. $0 + 0 = 0$

695

3. $1 + 0 = 1$

4. $1 + 1 = 10$ — результатом будет 0 в этом разряде, а 1 переносится в следующий разряд.

Рассмотрим данную операцию на примерах. Так, сложим числа $A = 1110111.01$ и $B = 101011.101$. Так как числа являются вещественными и имеют разное количество знаков в дробных частях, представим дробную часть числа A как $.010$, для наглядности вычислений.

$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & & \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & .0 & 1 & 0 \\ \hline & & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & .1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & (+1) & 1 & 1 \end{array}$$

В случае сложения чисел с плавающей точкой, выравниваются порядки чисел и операции производятся над мантиссами. Выравнивание порядков можно произвести как простым добавлением цифры 0 после точки, либо нахождением разности порядков и сдвигом меньшего числа вправо на значение, равное разности порядков. Так, сложим числа $A = 0.110111 * 10^1$ и $B = 0.11100011 * 10^{11}$. Приведем число A к виду $A = 0.00110111 * 10^{11}$.

$$\begin{array}{rrrrrrrr} 1 & 1 & 1 & & & 1 & 1 & 1 \\ 0. & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0. & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline 1. & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \quad +$$

Результатом здесь будет число $C = 1.00011010 * 10^{11}$ или, с фиксированной точкой, $C = 1000.1101$.

Двоичное вычитание

Вычитание в двоичной системе осуществляется по принципу обратному сложению. Здесь применяются следующие операции:

1. $0 - 0 = 0$

2. $1 - 0 = 1$

3. $1 - 1 = 0$

4. $0 - 1 = 1$ — единица берется из старшего разряда уменьшаемого числа

Приведем в пример вычитание из числа $A = 110011.110$ число $B = 100011.1001$

$$- \begin{array}{ccccccccc} & & & & & & & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & .1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & .1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & .0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Однако при проведении вычитания из меньшего большего получится лишь модуль числа, так, например $101 - 111 = 10$. Поэтому для операций с отрицательными числами используют их запись в дополнительном коде. Дополнительный код для положительного числа является самим числом, а для отрицательного получается по формуле

$$A' = 2^n + \bar{A} + 1,$$

где n – количество разрядов числа

То есть, если провести операцию $101 - 111$, заменив операнды соответствующим им дополнительным кодом, то получится: $0.101 + 1.001 = 1.110$. Мы получили дополнительный код нашего результата, чтобы проверить его правильность проведем обратные операции: единица в старшем разряде указывает на отрицательное значение, отнимаем из остальной части единицу $110 - 1 = 101$, после чего инвертируем и, в итоге, получаем -10 . Таким образом, мы получили выражение $5 - 7 = -2$ при помощи сложения дополнительных кодов.

Вычитание чисел, представленных с плавающей точкой, производится аналогично сложению. То есть выравниваются порядки чисел и операции производятся над мантиссами. Однако вычитание заменяется сложением чисел, представленных в соответствующих им дополнительных кодах.

Двоичное умножение

Умножение в двоичной системе производится аналогично десятичной. Числа умножаются поразрядно, после чего их значения складываются. Так как в двоичной системе используются только 0 и 1, можно упростить процесс, сдвигая разряд. Рассмотрим на примере: $A * B$, где $A = 100111$ и $B = 10101$

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1 \\
 \times \quad 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1 \\
 \hline
 1\ 0\ 1\ 0\ 1 \\
 + 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1 \\
 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\
 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1 \\
 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\
 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1 \\
 \hline
 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1 \\
 \times \quad 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1 \\
 \hline
 1\ 0\ 1\ 0\ 1 \\
 + 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1 \\
 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1 \\
 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1 \\
 \hline
 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1
 \end{array}
 \end{array}$$

Как видно из первой записи, при умножении числа A на 0 из числа B , мы получаем нули, во второй записи умножение на ноль было пропущено, и мы получили сумму из n чисел A , где n – количество единиц числа B . Стоит учитывать разряд слагаемого, так $10 * 101 = 10 + 1000 = 1010$, то есть ко второму слагаемому добавляем нули в таком количестве, сколько знаков после единицы, соответствующей слагаемому. Но такая запись не подразумевает использование отрицательных чисел.

Для двоичного умножения с учетом знака можно использовать прямой код. Такая запись, например, для числа $+1011$ будет иметь вид 0.1011 , а для $-1011 - 1.1011$. То есть в случае отрицательного числа в выделенный для знака разряд записывается единица, в противном случае – 0. Например, $A = +1101$ и $B = -1001$. Представим A и B в виде прямого кода: $A = 0.1101$; $B = 1.1001$, и, стоит учитывать, перемножаются только модули числа, а знаковые разряды складываются, так получим $0.1101 * 1.1001 = 1101 * 1001 = 1101 + 1101000 = 1110101$, что с учетом знакового разряда будет иметь вид 1.1110101 , так как $0 + 1 = 1$ в знаковом разряде.

При умножении чисел с плавающей запятой мантисса определяется произведением мантисс множителей, а порядок – суммой порядков множителей. При умножении мантисс выполняется по правилам умножения правильных дробей, а знак произведения определяется путем нахождения суммы модулей знаковых разрядов мантисс.

Двоичное деление

Деление в двоичной системе основывается на тех же принципах, что и в десятичной. Рассмотрим данную операцию на примере деления числа $B = 10$ из $A = 1010$. Вычисления будут проводиться в столбик для наглядности работы с разрядами чисел.

$$\begin{array}{r}
 1010 \overline{) 10} \\
 \underline{- 10} \\
 01 \\
 \underline{- 0} \\
 10 \\
 \underline{- 10} \\
 0
 \end{array}$$

Таким образом мы получили целое число. Для того чтобы получить остаток от деления и вещественное число в результате, надо, при наличии остатка после использования младшего разряда числителя, поставить в результате точку разделения целой и вещественной частей числа, и прибавлять к остатку 0 пока не будет достигнута необходимая точность, или не получим 0 в остатке. Так, например поделим число 1110 на 101.

$$\begin{array}{r}
 1110 \overline{) 101} \\
 \underline{- 101} \\
 1000 \\
 \underline{- 101} \\
 110 \\
 \underline{- 101} \\
 1000
 \end{array}$$

Здесь, мы получили периодическую дробь, в которой постоянно будет повторяться комбинация 1100. Если перевести это число в десятичную систему счисления, то получим $0.11 = 0 * 2^0 + 1 * 2^{-1} + 1 * 2^{-2} = 0.75$. Проверим, правильность вычислений поделив числа в десятичной системе: $14 \div 5 = 2.8$. Так как дробь периодическая, то с каждым добавлением комбинации цифр 1100, результат будет стремиться к 8, но не войдет в него. В таком случае вычисления проводятся до достижения необходимой точности.

При делении чисел с плавающей запятой мантисса определяется как частное мантисс делимого и делителя, а порядок – как разность их порядков. Деление мантисс выполняется по правилам деления дробей, в то время как знак результата устанавливается в зависимости от знаков делимого и делителя.

Вывод

В ходе исследования арифметических операций в двоичной системе счисления мы рассмотрели основные методы выполнения сложения,

вычитания, умножения и деления. Понимание этих операций является важной основой для работы с цифровыми устройствами и компьютерными системами, так как все данные в них представляются именно в двоичном виде. Что не только углубляет наше знание о работе компьютеров, но и подготавливает нас к решению более сложных задач в области информационных технологий, а также позволяет нам глубже понимать процессы, происходящие в современных вычислительных устройствах и программировании.

Список литературы

1. Качинский, В. В. Арифметические операции в двоичной системе счисления / В. В. Качинский. – Минск: Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, 2016. – 56 с.
2. Пешков, В. И. Организация вычислений в компьютерах / В. И. Пешков. – Минск: Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, 2019. – 128 с.
3. Санду, А. Вычислительная арифметика / А. Санду. – Технологический институт Вирджинии, 2007. – 84 с.
4. Строкалов, В. В. Основы алгоритмизации и вычислительных процессов / В. В. Строкалов. – Москва: Московский государственный университет технологий и управления, 2007. – 192 с.
5. Создание поведенческой модели LDMOS транзистора на основе искусственной MLP нейросети и ее описание на языке Verilog-A / С.А. Победа, М.И. Черных, Ф.В. Макаренко, К.В. Зольников // Моделирование систем и процессов. 2021. Т. 14, № 2. С. 28-34. DOI: 10.12737/2219-0767-2021-14-2-28-34.

References

1. Kachinskiy, V. V. Arithmetic Operations in Binary Number System / V. V. Kachinskiy. – Minsk: Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, 2016. – 56 p.
2. Peshkov, V. I. Organization of Computations in Computers / V. I. Peshkov. – Minsk: Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, 2019. – 128 p.
3. Sandu, A. Computational Arithmetic / A. Sandu. – Virginia Tech, 2007. – 84 p.
4. Strokalov, V. V. Fundamentals of Algorithmization and Computational Processes / V. V. Strokalov. – Moscow: Moscow State University of Technology and Management, 2007. – 192 p.
5. Creation of the behavioral model of the LDMOS transistor on the basis of the artificial MLP neural network and its description in Verilog-A language / S.A. Pobeda, M.I. Chernykh, F.V. Makarenko, K.V. Zolnikov // Modeling of systems and processes. 2021. T. 14, № 2. P. 28-34. DOI: 10.12737/2219-0767-2021-14-2-28-34.