

СХЕМА ГОРНЕРА

И.В. Сафонова, В.Ю. Федоров, Б.В. Тимофеев

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный лесотехнический университет
имени Г.Ф. Морозова»

Аннотация. В данной статье мы разберем как работает, Схема Горнера, где ей применяют, реализуем код на с++ и сравним с другими методами. Подкрепляя все примерами.

Ключевые слова: Схема Горнера, метод, алгоритм, многочлен.

HORNER'S SCHEME

I.V. Safonova, V.Y. Fedorov, B.V. Timofeev

Voronezh State University of Forestry and Technologies named after G.F. Morozov

Abstract. In this article, we will analyze how Horner's Scheme works, where it is used, implement the code in C++ and compare it with other methods. Supporting everything with examples.

Keywords: Horner's Scheme, method, algorithm, polynomial.

Введение

В 1819 году на территории Великобритании в газете “Королевского научного общества”, был опубликован способ приближенного вычисления действительных корней многочлена. Метод в газете называли Схемой Горнера, в честь британского математика Уильяма Джорджа Горнера. Но на самом деле, метод был открыт итальянским математиком Паоло Руффини за 15 лет до публикации в газете.

Схема Горнера многосторонняя, очень простая в реализации в коде и требующая намного меньше арифметических операций, и следствие требует намного меньше ресурсов ПК. Изучают этот метод в школе, но он не ограничивается школьной программой. При поступлении в высшее заведение теории и практика углубляется. Если в школьной программе были простые примеры уравнений для ознакомления, то в высших заведениях, на много все шире, и применение схемы Горнера не ограничивая решение только уравнений.

Цель данной статьи дать, базовое понимание о схеме Горнера. Особо не углублялись в подробности. Читатель при прочтении ознакомится с базовым

принцип работы метода, его применение, реализации его в коде и сравнением с другими методами.

Описание метода

Схема Горнера - это алгоритм, позволяющий вычислить значение многочлена, при уже задано значении переменной. Также этот алгоритм используется для деления многочлена на двух член x -с. Основной принцип работы метода, заключается в переписывании многочлена в форме Горнера:

$$F(x_0) = a_0 + x(a_1 + x_0(a_2 + \dots x(a_{n-1}x + a_n) \dots))$$

Затем определяется следующая последовательность:

- $b_n = a_n$
- $b_{n-1} = a_{n-1} + b_n x_0$
- ...
- $b_0 = a_0 + b_1 x_0$

Искомое значение многочлена $F(x_0)$ равно b_0

Пример:

$$x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$$

1. Выпишем делители свободного члена, в данном случае это 24
2. Смотрим делители числа 24 {1, 2, 3...24}
3. Подставляем любые число в наше выражение, которые мы нашли в втором пункте. До тех пор, пока при значении x , выражение будет равно нулю.

4. Пусть это будет $x=1$, подбираем

$$x=1, 1^3 - 9 \cdot 1^2 + 26 \cdot 1 - 24 \neq 0$$

$$x=-1, (-1)^3 - 9 \cdot (-1)^2 + 26 \cdot (-1) - 24 \neq 0$$

$$x=2, 2^3 - 9 \cdot 2^2 + 26 \cdot 2 - 24 = 0$$

Мы нашли в 4 пункте первый корень это $x=2$. Теперь нужно выписать коэффициенты в ряд и занести в таблицу.

$$1x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$$

$$x=2$$

1	-9	26	-24
---	----	----	-----

$$2$$

5. Записав коэффициенты. Первую цифру коэффициента вносим вниз.
6. Чтобы получить дальнейшие числа, нужно умножить 2 на 1, и вычитаем - 9 получаем -7. И так с дальнейшими числами.

	1	-9	26	-24
2	1	-7	12	0

7. Получившийся числа внизу являются коэффициентами, являются дальнейшими коэффициентами уравнение:

$$(x - 2) \cdot (x^2 - 7x + 12)$$

8. Берем уравнение $x^2 - 7x + 12 = 0$, при помощи дискриминанта находим корни $x_1=4$, $x_2=3$.

9. Итог уравнения $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$, имеет корни $x_1=2$, $x_2=4$, $x_3=3$.

Применение схеме Горнера

- Вычисление значений многочленов
- Деление многочленов
- Начальное приближения для итерации
- В компьютерной алгебре для выполнения многообразных операций

над многочленами

- Алгоритмах шифрования

Реализация в коде

На языке программирования на C++

```
double horner(const vector<double>& coefficients, double x)
```

```
{  
    double result = 0.0;  
    for (int i = coefficients.size() - 1; i >= 0; --i) {  
        result = result * x + coefficients[i];  
    }  
    return result;  
}
```

Переменные и их значение в коде:

- coefficient - это массив, в котором сохранены коэффициенты многочленов

- x - это первый корень уравнение
- result - результат вычисление многочлена

Особенности кода

- Цикл начинается с последнего коэффициента и приближается к первому.

- Каждая итерации в цикле результат обновляется
- После завершения цикла функция возвращает значение result

Пример работы:

у нас есть многочлен

$$F(x)=x^3-9x^2+26x-24$$

В таком случае coefficient будет равно {1, -9, 26, -24}, x будет равен 2, fresult будет равен 0

1. На первом шаге result = 1
2. На втором шаге result = 2-9 = -7
3. На третьем шаге result = -14+26 = 12
4. На четвертом шаге result = 24 - 24 = 0

Цикл заканчивается и конечное значение result будет равен 0

Таблица 1 – Сравнение с другими методами

Метод	Преимущества	Недостатки	Область применения
Схема Горнера	Эффективность, простота реализации в коде	Не предназначен для нахождения всех корней в уравнение	Вычисление значения многочлена в точке
Метод Ньютона	Быстрая сходимость	Нужно начального приближения	Нахождение корней
Метод Брента	Быстрая и независимая сходимость	Более сложная реализация в коде	Нахождение корней

Заключение

Схема Горнера является простым, но не менее эффективный алгоритм. Не зря его принимают в различных технических областях. Но как и все методы имеют свои преимущества и недостатки, куда без этого. Мы разобрали как работает метод Горнера, и написали код на с++ и сравнили другие методы, вычисление значения многочлена. Понимание принципов работы Схема Горнера является важным навыком для любого специалиста, работающего с многочленами.

Список литературы

1. Левитин А. В. Глава 6. Метод преобразования: Схема Горнера и возведение в степень // Алгоритмы. Введение в разработку и анализ. – М.: Вильямс, 2006. – С. 28-291. – 576 с. – ISBN 978-5-8459-0987-9.
2. Бахтин, И. В. Руководство по выбору лучшего программного обеспечения для управления проектами / И. В. Бахтин // Научный электронный журнал Меридиан. – 2020. – № 7(41). – С. 60-62.
3. Волков Е. А. § 2. Вычисление значений многочлена. Схема Горнера // Численные методы: учеб. пособие для вузов. – 2-е изд., испр. – М.: Наука, 1987. – 248 с.
4. Бедердинова, О. И. Автоматизированное управление IT-проектами: учебное пособие / О.И. Бедердинова, Ю.А. Водовозова. – Москва: ИНФРА-М, 2021. – 92 с.
5. Гашков С. Б. § 14. Схема Горнера и перевод из одной позиционной системы в другую // Системы счисления и их применение. – М.: МЦНМО, 2004. – С. 37-39. – (Библиотека «Математическое просвещение»). – ISBN 5-94057-146-8.
6. Звягинцева, А.В. Природоохранные мероприятия для снижения загрязнения атмосферы на территории специализированного объекта / А.В. Звягинцева, С.А. Сазонова, И.Н. Пантелеев // Моделирование систем и процессов. – 2021. – Т. 14, № 4. – С. 21-28. – DOI: 10.12737/2219-0767-2021-14-4-21-28.

References

1. Levitin A. V. Chapter 6. Transformation Method: Horner's Scheme and Exponentiation // Algorithms. Introduction to Development and Analysis. – Moscow: Williams, 2006. – Pp. 284–291. – 576 p. – ISBN 978-5-8459-0987-9.
2. Bakhtin, I. V. Guide to Choosing the Best Project Management Software / I. V. Bakhtin // Scientific Electronic Journal Meridian. – 2020. – No. 7(41). – Pp. 60-62.
3. Volkov E. A. § 2. Calculating Polynomial Values. Horner's Scheme // Numerical Methods: Textbook for Universities. – 2nd ed., corr. – M.: Nauka, 1987. – 248 p.
4. Bederdinova, O. I. Automated management of IT projects: a tutorial / O. I. Bederdinova, Yu. A. Vodovozova. - Moscow: INFRA-M, 2021. - 92 p.
5. S. B. Gashkov. § 14. Horner's scheme and translation from one positional system to another // Number systems and their application. - M.: MCNO, 2004. - P. 37-39. - (Library "Mathematical education"). - ISBN 5-94057-146-8.
6. Zvyagintseva, A.V. Nature protection measures to reduce atmospheric pollution on the territory of the specialized object / A.V. Zvyagintseva, S.A. Sazonova, I.N. Panteleev // Modeling of systems and processes. – 2021. – Vol. 14, № 4. – P. 21-28. – DOI: 10.12737/2219-0767-2021-14-4-21-28.