

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАКОНА КУЛОНА

Е.И. Скворцова¹, А.С. Ягодкин¹, Д.М. Охрименко¹

¹ФГБОУ ВО «Воронежский государственный лесотехнический университет
имени Г.Ф. Морозова»

Аннотация. В статье рассматриваются ключевые аспекты закона Кулона, который описывает взаимодействие между электрическими зарядами. Установлено, что сила взаимодействия между двумя точечными зарядами обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними и прямо пропорциональна произведению величин этих зарядов. Статья акцентирует внимание на векторной природе силы, что позволяет более точно описывать направления и величины взаимодействий в различных системах. Статья подчеркивает значимость глубокого понимания закона Кулона для дальнейшего развития теории электрических взаимодействий и их практического применения в научных исследованиях и инженерных решениях.

Ключевые слова: закон кулона, точечные заряды, электрические взаимодействия, микроскопические тела, принцип суперпозиции.

MATHEMATICAL MODELING OF COULOMB'S LAW

E.I. Skvortsova¹, A.S. Yagodkin¹, D.M. Ohrimenko¹

¹Voronezh State University of Forestry and Technologies named after G.F. Morozov

Abstract. The article discusses key aspects of Coulomb's law, which describes the interaction between electric charges. It is established that the force of interaction between two point charges is inversely proportional to the square of the distance between them and directly proportional to the product of the magnitudes of these charges. The article focuses on the vector nature of force, which allows for a more accurate description of the directions and magnitudes of interactions in various systems. The article emphasizes the importance of a deep understanding of Coulomb's law for the further development of the theory of electrical interactions and their practical application in scientific research and engineering solutions.

Keywords: Coulomb's law, point charges, electrical interactions, microscopic bodies, superposition principle.

Рассмотрим, как будет взаимодействовать одна заряженная частица, которая находится в состоянии покоя с группой покоящихся элементарных заряженных частиц. Здесь учитывается принцип суперпозиции. Он означает, что суммарная электростатическая сила взаимодействия какой-либо заряженной частицы q_0 с группой частиц может быть вычислена как векторная сумма сил парных взаимодействий:

$$f_{0\Sigma} = \sum_i \frac{q_0 q_i}{|R - r_i|^3} (R - r_i),$$

где $f_{0\Sigma}$ – обозначение для результирующей силы, действующей на заряд q_0 из-за других зарядов q_i ;

$|R - r_i|$ – расстояние между зарядом q_0 и зарядом q_i ;

$|R - r_i|^3$ – возведение в третью степень расстояния используется для учета направления силы. Это связано с тем, что сила пропорциональна $\frac{1}{r^2}$ и векторная форма требует деления на $|R - r_i|$ для получения направленного вектора.

Можно взять первую из частиц, определяющих возникновение силы на рассматриваемом участке и рассчитать силу их взаимодействия, будто других частиц нет, потом вторую, третью и, вычислив эти силы, сложить.

Принцип суперпозиции выполняется для гравитационных и электромагнитных взаимодействий, а в сильных ядерных, химических взаимодействиях, принцип суперпозиции практически не применяется.

Чтобы рассчитать силу взаимодействия двух макроскопических тел, необходимо каждое из них представить, как совокупность элементарных частиц, рассчитать силы, возникающие в результате взаимодействия каждой частицы одного тела с каждой частицей другого тела, и эти силы сложить:

$$F_{12} = \sum_{ik} q_i q_k \frac{(r_1 + r_i) - (r_2 + r_j)}{|(r_1 + r_i) - (r_2 + r_j)|^3},$$

где F_{12} – результирующая сила, действующая между двумя зарядами Q_1 и Q_2 с учетом влияния других зарядов q_i и q_k ;

$(r_1 + r_i) - (r_2 + r_j)$ – выражение представляет собой вектор, указывающий направление от точки, где находится заряд Q_2 к точке, где находится заряд Q_1 ;

Здесь r_1 и r_2 это положения зарядов q_1 и q_2 соответственно, а r_i и r_j могут обозначать дополнительные положения, связанные с другими зарядами;

$|(r_1 + r_i) - (r_2 + r_j)|^3$ – куб расстояния между двумя точками, определяемыми положениями зарядов q_1 и q_2 .

Рассмотрим тела, размеры которых гораздо меньше расстояния между ними, такие тела называются точечными телами. В этом случае расстояние между двумя точечными телами можно характеризовать, как R , которое проведено из какой-либо удобной для нас точки одного тела в какую-либо точку другого тела:

$$r_1 - r_2 = r_{12} = R,$$

где r_1 – вектор, представляющий положение первого объекта в пространстве;

r_2 – вектор, представляющий положение второго объекта в пространстве;

r_{12} – вектор, который указывает направление и расстояние от второго объекта к первому. Вычисляется как разность векторов r_1 и r_2 .

Но относительно этих двух точек положения зарядов смещены, соответствующее смещение можем записать как в одном теле r_i и r_j в другом, тогда по принципу суперпозиции суммарная сила взаимодействия между двумя телами выражается следующей формулой:

$$F_{12} = \sum_{ik} q_i q_k \frac{R + r_i - r_j}{|R + r_i - r_j|^3} \approx (\sum_i q_i) * (\sum_j q_j) \frac{R}{|R|^3} = q_{1\Sigma} q_{2\Sigma} \frac{R}{|R|^3},$$

где F_{12} – результирующая сила, действующая между двумя группами зарядов. Она зависит от взаимодействия всех зарядов в системе;

$\sum_{ik} q_i q_k$ – суммирование по всем парам зарядов q_i и q_k . Здесь q_i – это заряд из первой группы, а q_k – заряд из второй группы. Это выражение учитывает взаимодействие между каждым зарядом из первой группы и каждым зарядом из второй группы;

$R + r_i - r_j$ – вектор, который указывает направление от одного заряда к другому;

R – вектор, определяющий расстояние между двумя основными объектами зарядов;

r_i и r_j – векторы, представляющие дополнительные заряды в системах, которые могут влиять на силу;

$|R + r_i - r_j|^3$ – куб длины вектора $R + r_i - r_j$. Он используется для нормализации векторной силы, поскольку сила пропорциональна $\frac{1}{r^2}$ и векторная форма требует деления на модуль;

$(\sum_i q_i) * (\sum_j q_j)$ – произведение сумм всех зарядов в первой и второй группах.

Здесь $q_{1\Sigma}$ и $q_{2\Sigma}$ обозначают суммарные заряды в каждой из групп;

$\frac{R}{|R|^3}$ – выражение представляет собой вектор, направленный от одного объ-

екта к другому, нормализованный по кубу его длины. Это соответствует тому, как сила зависит от расстояния между зарядами.

В каждом слагаемом этой суммы, помимо R , есть незначительные слагаемые, которыми в случае точечных тел, при первом приближении можно пренебречь и тогда расстояние между рассматриваемыми телами перестает зависеть от номера заряда, тогда расстояние выносится из-под знака суммы и в результате суммирования получается всего лишь произведение макроскопических зарядов двух тел. В результате получаем закон Кулона. Два точечных макроскопических тела, находящихся в покое, взаимодействуют между собой с силой, пропорциональной произведению их макроскопических зарядов и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними.

По записи математического выражения этого закона получаем формулу, полностью совпадающую с законом взаимодействия элементарных частиц:

$$f_{12} = \text{const} \frac{q_1 q_2 r_{12}}{|r_{12}|^3},$$

где f_{12} – векторная сила, действующая между зарядами q_1 и q_2 ;

$q_1 q_2$ – величины зарядов, которые взаимодействуют друг с другом. Сила взаимодействия пропорциональна произведению этих зарядов;

$|r_{12}|^3$ – куб длины вектора r_{12} . Используется для нормализации векторной силы, так как сила пропорциональна $\frac{1}{r^2}$ и векторная форма требует деления на модуль.

Закон электростатического взаимодействия двух элементарных частиц является точным, а закон Кулона, где он представляется как экспериментальный факт, на самом деле, является законом приближенным:

$$F_{12} = \text{const} \frac{q_{1\Sigma} q_{2\Sigma} R}{|R|^3},$$

где F_{12} – векторная сила, действующая между двумя системами зарядов;

$q_{1\Sigma} q_{2\Sigma}$ – суммарные заряды двух систем;

R – вектор, определяющий расстояние между двумя основными объектами зарядов. Он может быть представлен как разность их положений в пространстве;

$|R|^3$ – модуль (длина) вектора R , который представляет собой расстояние между центрами зарядов двух систем.

Рассмотрим две молекулы воды, у этих тел суммарный электрический заряд равен нулю и поэтому по закону Кулона электростатическая сила между этими молекулами должна равняться нулю. Именно поэтому закон Кулона является приближенным, но занимаясь макроскопической формулой будем использовать его наряду с законом взаимодействия двух элементарных частиц. Заряды элементарных частиц или точечные заряды обозначаются строчными буквами и для таких зарядов будем применять закон обратных квадратов. Когда заряды занимают объемы пространства, сравнимые с расстоянием между ними, в случае линейного объема, необходимо разбивать объекты на точечные тела и применять принцип суперпозиции.

Список литературы

1. Формализация верификации топологии и электрической схемы для систем автоматизированного проектирования / Т. В. Скворцова, К. В. Зольников, А. М. Плотников, И. В. Скоркин // Моделирование систем и процессов. – 2024. – Т. 17, № 3. – С. 61-70.
2. Система мониторинга и оповещения о проникновении на территорию биосферного заповедника / А. С. Ягодкин, А. В. Ачкасов, Т. В. Скворцова [и др.] // Охрана, инновационное восстановление и устойчивое управление лесами. Forestry – 2023: материалы Международного лесного форума, Воронеж, 13 октября 2023 года. – Воронеж: Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г.Ф. Морозова, 2023. – С. 631-637.
3. Разработка системы предупреждения водителей о возможном появлении животных на автомобильных дорогах / А. С. Ягодкин, Т. В. Скворцова,

А. В. Ачкасов [и др.] // Охрана, инновационное восстановление и устойчивое управление лесами. Forestry – 2023 : материалы Международного лесного форума, Воронеж, 13 октября 2023 года. – Воронеж: Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г.Ф. Морозова, 2023. – С. 638-643.

4. Цифровое устройство мониторинга и анализа общего состояния дерева "Happytree" / А. С. Ягодкин, Т. В. Скворцова, А. В. Ачкасов, Д. В. Никитин // СПОСОБЫ, МОДЕЛИ и АЛГОРИТМЫ УПРАВЛЕНИЯ МОДЕРНИЗАЦИОННЫМИ ПРОЦЕССАМИ : сборник статей Национальной (Всероссийской) научно-практической конференции с международным участием, Киров, 22 мая 2023 года. – Уфа: Общество с ограниченной ответственностью "ОМЕГА САЙНС", 2023. – С. 51-55.

5. Компьютерное моделирование работоспособности финишных процедур и паразитных элементов в программно-аппаратном комплексе проектирования микросхем / А. С. Ягодкин, Н. Н. Литвинов, П. С. Иванин, А. С. Грошев // Моделирование систем и процессов. – 2024. – Т. 17, № 3. – С. 106-115.

6. Шагеев, Д. А. Поиск решения проблемы выбора формы свёртки локальных векторов с целью повышения точности измерений в методе анализа иерархий / Д. А. Шагеев // Моделирование систем и процессов. – 2024. – Т. 17, № 3. – С. 95-105. – DOI 10.12737/2219-0767-2024-93-103. – EDN FUFKOH.

7. Компьютерное моделирование работоспособности финишных процедур и паразитных элементов в программно-аппаратном комплексе проектирования микросхем / А. С. Ягодкин, Н. Н. Литвинов, П. С. Иванин, А. С. Грошев // Моделирование систем и процессов. – 2024. – Т. 17, № 3. – С. 106-115. – DOI 10.12737/2219-0767-2024-104-113. – EDN NICLOY.

8. Акименко, А. В. Алгоритм расчета теплопритоков холодильника / А. В. Акименко, Е. А. Аникеев, Р. Ю. Медведев // Моделирование систем и процессов. – 2024. – Т. 17, № 2. – С. 7-15. – DOI 10.12737/2219-0767-2024-17-2-7-15. – EDN GAZNTP.

References

1. Formalization of verification of topology and electrical circuit for computer-aided design systems / T. V. Skvortsova, K. V. Zolnikov, A. M. Plotnikov, I. V. Skorkin // Modeling of systems and processes. – 2024. – Vol. 17, No. 3. – P. 61-70.

2. Monitoring and warning system for intrusion into the territory of a biosphere reserve / A. S. Yagodkin, A. V. Achkasov, T. V. Skvortsova [et al.] // Protection, innovative restoration and sustainable management of forests. Forestry – 2023: materials

of the International Forestry Forum, Voronezh, October 13, 2023. – Voronezh: Voronezh State Forest Engineering University named after G. F. Morozov, 2023. – P. 631-637.

3. Development of a system for warning drivers about the possible appearance of animals on roads / A. S. Yagodkin, T. V. Skvortsova, A. V. Achkasov [et al.] // Protection, innovative restoration and sustainable management of forests. Forestry – 2023: materials of the International Forestry Forum, Voronezh, October 13, 2023. – Voronezh: Voronezh State Forest Engineering University named after G. F. Morozov, 2023. – P. 638-643.

4. Digital device for monitoring and analyzing the general condition of a tree "Happytree" / A. S. Yagodkin, T. V. Skvortsova, A. V. Achkasov, D. V. Nikitin // METHODS, MODELS and ALGORITHMS FOR MANAGING MODERNIZATION PROCESSES: collection of articles from the National (All-Russian) scientific and practical conference with international participation, Kirov, May 22, 2023. – Ufa: Limited Liability Company "OMEGA SCIENCES", 2023. – P. 51-55.

5. Computer modeling of the performance of finishing procedures and parasitic elements in the hardware and software complex for designing microcircuits / A. S. Yagodkin, N. N. Litvinov, P. S. Ivanin, A. S. Groshev // Modeling of systems and processes. – 2024. – Vol. 17, No. 3. – P. 106-115.

6. Shageev, D. A. Search for a solution to the problem of choosing the form of convolution of local vectors in order to increase the accuracy of measurements in the hierarchy analysis method / D. A. Shageev // Modeling of systems and processes. – 2024. – Vol. 17, No. 3. – pp. 95-105. – DOI 10.12737/2219-0767-2024-93-103. – EDN FUFKOX.

7. Computer simulation of the operability of finishing procedures and parasitic elements in the software and hardware complex of microcircuit design / A. S. Yagodkin, N. N. Litvinov, P. S. Ivanin, A. S. Groshev // Modeling of systems and processes. – 2024. – VOL. 17, No. 3. – PP. 106-115. – DOI 10.12737/2219-0767-2024-104-113. – EDN NICLOY.

8. Akimenko, A.V. Algorithm for calculating refrigerator heat flows / A.V. Akimenko, E. A. Anikeev, R. Y. Medvedev // Modeling of systems and processes. – 2024. – Vol. 17, No. 2. – pp. 7-15. – DOI 10.12737/2219-0767-2024-17-2-7-15. – EDN GAZNTP.

.