

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ФОРМА ЗАПИСИ ЭЛЕКТРОСТАТИКИ ВАКУУМА

Е.И. Скворцова¹, А.С. Ягодкин¹, Е.В. Смирнова¹

¹ФГБОУ ВО «Воронежский государственный лесотехнический университет
имени Г.Ф. Морозова»

Аннотация. В статье рассматриваются основные принципы описания электрических полей с акцентом на дифференциальную форму уравнения Гаусса. Установлено, что в вакууме взаимодействие электрического поля с зарядом можно адекватно описать с помощью плотности заряда, изменяющейся в пространстве. Статья охватывает важные аспекты, связанные с понятием Гауссовой поверхности и интегральным выражением закона Гаусса, что позволяет более глубоко понимать распределение электрических полей в неоднородных средах. Статья подчеркивает значимость глубокого понимания дифференциальной формы уравнений электростатики для дальнейшего развития теории электрических полей и их применения в различных научных и практических контекстах, а также для облегчения интерпретации процессов, связанных с электрическими взаимодействиями.

Ключевые слова: теорема Гаусса, ротор напряженности электронного поля, дифференциальная форма записи уравнения Гаусса, замкнутая поверхность, электрические поля.

DIFFERENTIAL FORM OF RECORDING ELECTROSTATICS OF VACUUM

E.I. Skvortsova¹, A.S. Yagodkin¹, E.V. Smirnova¹

¹Voronezh State University of Forestry and Technologies named after G.F. Morozov

Abstract. The article discusses the basic principles of describing electric fields with an emphasis on the differential form of the Gauss equation. It is established that in a vacuum the interaction of an electric field with a charge can be adequately described using a charge density that varies in space. The article covers important aspects related to the concept of a Gauss surface and the integral expression of the Gauss law, which allows for a deeper understanding of the distribution of electric fields in inhomogeneous media. The article emphasizes the importance of a deep understanding of the differential form of the equations of electrostatics for the further development of the theory of

electric fields and their application in various scientific and practical contexts, as well as for facilitating the interpretation of processes associated with electrical interactions.

Keywords: Gauss theorem, curl of the electron field strength, differential form of the Gauss equation, closed surface, electric fields.

Рассмотрим дифференциальную форму записи уравнения Гаусса:

$$\oint_{\Gamma_2} (E, dS) = 4\pi Q_{\Sigma} * \left\{ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right\}$$

где $\oint_{\Gamma_2} (E, dS)$ – это интеграл потока электрического поля E через замкнутую поверхность (Γ_2) ;

E – вектор электрического поля, который описывает силу, действующую на единичный положительный заряд в данной точке пространства;

dS – элемент площади на поверхности (Γ_2) , через который проходит электрическое поле;

$4\pi Q_{\Sigma}$ – это выражение, которое связано с зарядом Q заключенным внутри поверхности. Здесь Q может представлять собой общий заряд, который находится внутри рассматриваемой поверхности;

$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ – это константа, которая появляется в уравнении, связанная с электрической постоянной ϵ_0 .

Она определяет, как электрическое поле взаимодействует с зарядом в вакууме.

За основу, в качестве примера, возьмем некоторое пространство, непрерывно заполненное плотностью заряда, которая меняется от точки к точке. В этом пространстве рассмотрим Гауссову замкнутую поверхность (рисунок 1) в виде небольшого прямоугольника, стороны которого ориентированы параллельно осям координат. Объем этой поверхности будет равен нулю.

Этот прямоугольник является замкнутой поверхностью и для нее можно записать теорему Гаусса: поток вектора напряженности электрического поля через ее поверхность равен 4π на суммарный заряд внутри этой коробочки. Суммарный заряд равен произведению плотности заряда внутри этой коробочки. Коробочка такая маленькая, что внутри нее плотность заряда – всегда константа на объем коробочки.

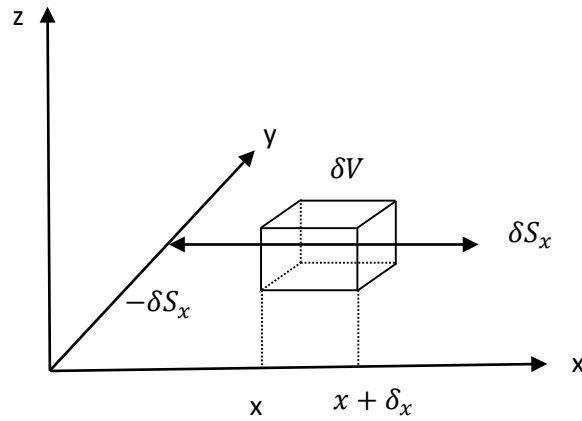


Рисунок 1 – Гауссова замкнутая поверхность

$$4\pi\rho(r)*\delta V = \oint_{\Gamma 2} (E, dS) = (E_x(r_x + \delta r_x) - E_x(r_x))\delta r_y \delta r_z \dots = \sum_{\xi 0xyz} (E_\xi(r_\xi + \delta r_\xi) - E_\xi(r_\xi))\delta r_\xi \delta r_{\xi+2}$$

где $4\pi\rho(r)*\delta V$ – это выражение, которое связывает плотность заряда $\rho(r)$ в данной точке пространства с объемом δV .

Здесь:

$\rho(r)$ – объемная плотность заряда в точке r ;

δV – малый объем, в котором мы рассматриваем распределение заряда;

4π – коэффициент, который часто появляется в контексте сферической симметрии и интеграции по поверхности;

$\oint_{\Gamma 2} (E, dS)$ – интеграл потока электрического поля E через замкнутую поверхность ($\Gamma 2$). Он показывает, как электрическое поле взаимодействует с зарядом внутри этой поверхности;

$(E_x(r_x + \delta r_x) - E_x(r_x))$ – изменение в компоненте электрического поля при перемещении r_x на малое расстояние δr_x ;

$\sum_{\xi 0xyz} (E_\xi(r_\xi + \delta r_\xi) - E_\xi(r_\xi))\delta r_\xi \delta r_{\xi+2}$ – сумма изменений электрического поля по

всем компонентам (x, y, z), что позволяет учитывать вклад каждой компоненты в общий поток.

Оформим поток вектора E через поверхность этого прямоугольника. Рассмотрим сторону прямоугольника, ориентированного перпендикулярно оси X , расположенную в точке $r_x + \Delta$ (Δ – незначительное расстояние). В этом месте вектор площади смотрит из Гауссова прямоугольника, то есть смотрит вдоль оси X , соответственно скалярное произведение напряженности поля на этот вектор

площади даст произведение X компоненты напряженности поля в $r_x + \Delta$ на площадь соответствующей крышки $dr_y * dr_z$. Аналогичный поток будет проходить через противоположную крышку прямоугольника, ориентированную к точке r_x , здесь вектор площади будет смотреть против оси X. Следовательно, скалярное произведение даст минус X компоненту напряженности поля на соответствующую площадь. Аналогичные пары слагаемых возникнут для двух крышек прямоугольников, расположенных перпендикулярно оси Y, и для двух крышек прямоугольников, расположенных перпендикулярно оси Z. А теперь обе части поделим на объем Гауссова прямоугольника. dr_x, dr_y, dr_z . Рассмотрим первые два слагаемых, содержащих X компоненту напряженности электрического поля. Отрезки dr_y, dr_z , входящие в выражение d – площади крышки коробки, сократятся соответствующими отрезками, входящими в выражение для объема. Но один из отрезков – это длина прямоугольника вдоль оси X, не сократится. В числителе будет разность напряженности электрического поля, $X+\Delta$ и значения этой напряженности в точке X, вернее не всей напряженности, а только X ее компоненты. Но тогда при стремлении $dr_x \Rightarrow 0$, мы получаем производную X компоненты напряженности электрического поля по координате X при условии, что Y и Z дифференцировать не требуется. Такая производная называется частной производной:

$$4\pi\rho(r) = \sum_{\xi} \frac{E_{\xi}(r_{\xi} + \delta r_{\xi}) - E_{\xi}(r_{\xi})}{\delta E_{\xi}} \Rightarrow \sum_{\xi} \frac{\partial E_{\xi}}{\partial r_{\xi}},$$

где $4\pi\rho(r)$ – это выражение, которое связывает объемную плотность заряда $\rho(r)$ в данной точке пространства с коэффициентом 4π , появляющийся в контексте электростатики, особенно при использовании сферической симметрии;

$$\sum_{\xi} \frac{E_{\xi}(r_{\xi} + \delta r_{\xi}) - E_{\xi}(r_{\xi})}{\delta E_{\xi}} - \text{сумма изменений компонентов электрического поля}$$

по всем направлениям (x, y, z). Здесь:

$E_{\xi}(r_{\xi} + \delta r_{\xi})$ – значение электрического поля в точке, смещенной на малое расстояние δr_{ξ} ;

$E_{\xi}(r_{\xi})$ – значение электрического поля в исходной точке;

δE_{ξ} – малое изменение электрического поля.

В результате произведение $4\pi\rho$ равно сумме производных каждой из компонент вектора напряженности электрического поля по соответствующей координате. Такую операцию называют дивергенцией вектора напряженности электрического поля. В результате получаем дифференциальную форму записи теоремы Гаусса:

$$4\pi\rho(r) = \sum_{\xi} \frac{\partial E_{\xi}}{\partial r_{\xi}} = \operatorname{div} E,$$

где $4\pi\rho$ – это выражение, связывающее объемную плотность заряда $4\pi\rho(r)$ с коэффициентом 4π ;

$$\sum_{\xi} \frac{\partial E_{\xi}}{\partial r_{\xi}} - \text{это сумма частных производных компонент электрического поля}$$

E по соответствующим координатам r_{ξ} . Каждая компонента электрического поля E_{ξ} может зависеть от пространственных координат, и эта сумма показывает, как электрическое поле изменяется в пространстве;

$\operatorname{div} E$ – оператор дивергенции, который применяется к векторному полю. Дивергенция векторного поля измеряет, насколько это поле "выходит" из точки в пространстве. Положительная дивергенция ($\operatorname{div} E > 0$) указывает на наличие источника, а отрицательная дивергенция ($\operatorname{div} E < 0$) на наличие стока;

Дивергенция вектора напряженности электростатического поля равна 4π на плотность электрического заряда в той точке, где вычисляется дивергенция. Выражение для дивергенции можно записать компактно в виде скалярного произведения оператора пространственного дифференцирования на вектор E :

$$4\pi\rho(r) = \sum_{\xi} \frac{\partial E_{\xi}}{\partial r_{\xi}} = \operatorname{div} E = (\nabla, E),$$

где $4\pi\rho(r)$ – выражение, связывающее объемную плотность заряда $\rho(r)$ с его коэффициентом 4π ;

$$\sum_{\xi} \frac{\partial E_{\xi}}{\partial r_{\xi}} - \text{сумма частных производных компонент электрического поля } E,$$

по соответствующим координатам r_{ξ} . Каждая компонента электрического поля E_{ξ} может зависеть от пространственных координат, и эта сумма показывает, как электрическое поле изменяется в пространстве и указывает на его локальные изменения;

$\operatorname{div} E = (\nabla, E)$ – это оператор дивергенции, который применяется к векторному полю E .

Кроме операции скалярного умножения оператора пространственного дифференцирования, можно записать еще операцию векторного перемножения векторного оператора дифференцирования на вектор напряженности поля. Соответствующая операция получила название "ротор напряженности векторного поля".

$$|\nabla, E| = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \sum_{\xi=0,x,y,z} \left(\frac{\partial E_{\xi+1}}{\partial r_{\xi+2}} - \frac{\partial E_{\xi+2}}{\partial r_{\xi+1}} \right) e_{\xi} = \text{rot} E$$

где ∇ – векторный оператор, который используется для обозначения градиента, дивергенции и роторного оператора. Он включает в себя частные производные по координатам x, y, z ;

E – векторное поле имеет компоненты E_x, E_y, E_z , которые представляют собой значения электрического поля в трехмерном пространстве;

$\text{rot} E$ – вектор, который описывает локальную вращательную составляющую векторного поля. Он показывает, насколько поле E "крутится" вокруг точки в пространстве;

$$\sum_{\xi=0,x,y,z} \left(\frac{\partial E_{\xi+1}}{\partial r_{\xi+2}} - \frac{\partial E_{\xi+2}}{\partial r_{\xi+1}} \right) e_{\xi} - \text{описывает компоненты ротора, где } e_{\xi} - \text{это базисные}$$

векторы в пространстве. Каждая пара частных производных в этой сумме отражает разность изменений компонент поля E в различных направлениях, что и приводит к определению вращения.

Рассмотрим такое свойство ротора напряженности векторного поля, что он всегда равен нулю. Это свойство связано с интегральной теоремой о том, что циркуляция вектора напряженности электрического поля по любому замкнутому контуру равна нулю:

$$\int_{\Gamma_1} (E, dl) = 0$$

где E – это векторное поле, например, электрическое поле. Оно может иметь компоненты в различных направлениях E_x, E_y, E_z ;

dl – это элемент длины вдоль контура (Γ_1);

(E, dl) – обозначает скалярное произведение вектора E и вектора dl . Это выражение вычисляет проекцию вектора E на направление dl и суммирует эту проекцию по всему контуру.

В работе акцентируется внимание на важности понимания дифференциальной формы уравнений электростатики, которая позволяет более глубоко анализировать поведение электрических полей и взаимодействий в различных средах. Используя теорему Гаусса, показано, как плотность заряда влияет на напряженность электрического поля, что делает эту концепцию ключевой для дальнейшего изучения электростатики и связанных с ней вопросов. Исследование, проведенное в рамках данной статьи, подчеркивает значимость математического формализма в физике для анализа и предсказания явлений, связанных с электромагнитными полями.

В заключение, понимание этих основополагающих законов и их математических представлений служит необходимой основой для более сложных концепций в электротехнике и физике в целом. Это позволяет исследовать не только статические, но и динамические системы, создавая прочный фундамент для будущих научных открытий и практических приложений в различных областях.

Список литературы

1. Формализация верификации топологии и электрической схемы для систем автоматизированного проектирования / Т. В. Скворцова, К. В. Зольников, А. М. Плотников, И. В. Скоркин // Моделирование систем и процессов. – 2024. – Т. 17, № 3. – С. 61-70.

2. Система мониторинга и оповещения о проникновении на территорию биосферного заповедника / А. С. Ягодкин, А. В. Ачкасов, Т. В. Скворцова [и др.] // Охрана, инновационное восстановление и устойчивое управление лесами. Forestry – 2023 : материалы Международного лесного форума, Воронеж, 13 октября 2023 года. – Воронеж: Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г.Ф. Морозова, 2023. – С. 631-637.

3. Разработка системы предупреждения водителей о возможном появлении животных на автомобильных дорогах / А. С. Ягодкин, Т. В. Скворцова, А. В. Ачкасов [и др.] // Охрана, инновационное восстановление и устойчивое управление лесами. Forestry – 2023 : материалы Международного лесного форума, Воронеж, 13 октября 2023 года. – Воронеж: Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г.Ф. Морозова, 2023. – С. 638-643.

4. Цифровое устройство мониторинга и анализа общего состояния дерева "Happytree" / А. С. Ягодкин, Т. В. Скворцова, А. В. Ачкасов, Д. В. Никитин // Способы, модели и алгоритмы управления модернизационными процессами : сборник

статей Национальной (Всероссийской) научно-практической конференции с международным участием, Киров, 22 мая 2023 года. – Уфа: Общество с ограниченной ответственностью "ОМЕГА САЙНС", 2023. – С. 51-55.

5. Компьютерное моделирование работоспособности финишных процедур и паразитных элементов в программно-аппаратном комплексе проектирования микросхем / А. С. Ягодкин, Н. Н. Литвинов, П. С. Иванин, А. С. Грошев // Моделирование систем и процессов. – 2024. – Т. 17, № 3. – С. 106-115.

References

1. Formalization of verification of topology and electrical circuit for computer-aided design systems / T. V. Skvortsova, K. V. Zolnikov, A. M. Plotnikov, I. V. Skorkin // Modeling of systems and processes. – 2024. – Vol. 17, No. 3. – P. 61-70.

2. Monitoring and warning system for intrusion into the territory of a biosphere reserve / A. S. Yagodkin, A. V. Achkasov, T. V. Skvortsova [et al.] // Protection, innovative restoration and sustainable management of forests. Forestry – 2023: materials of the International Forestry Forum, Voronezh, October 13, 2023. – Voronezh: Voronezh State Forest Engineering University named after G. F. Morozov, 2023. – P. 631-637.

3. Development of a system for warning drivers about the possible appearance of animals on roads / A. S. Yagodkin, T. V. Skvortsova, A. V. Achkasov [et al.] // Protection, innovative restoration and sustainable management of forests. Forestry – 2023: materials of the International Forestry Forum, Voronezh, October 13, 2023. – Voronezh: Voronezh State Forest Engineering University named after G. F. Morozov, 2023. – P. 638-643.

4. Digital device for monitoring and analyzing the general condition of a tree "Happytree" / A. S. Yagodkin, T. V. Skvortsova, A. V. Achkasov, D. V. Nikitin // Methods, models and algorithms for managing modernization processes: collection of articles from the National (All-Russian) scientific and practical conference with international participation, Kirov, May 22, 2023. – Ufa: Limited Liability Company "OMEGA SCIENCES", 2023. – P. 51-55.

5. Computer modeling of the performance of finishing procedures and parasitic elements in the hardware and software complex for designing microcircuits / A. S. Yagodkin, N. N. Litvinov, P. S. Ivanin, A. S. Groshev // Modeling of systems and processes. – 2024. – Vol. 17, No. 3. – P. 106-115.