

КАНОНИЧЕСКИЕ ФОРМЫ ЛОГИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ: ОСНОВЫ И ПРИМЕНЕНИЕ

М.В. Шастин¹, О.Л. Бордюжа¹, Е.В. Грошева¹

¹ФГБОУ ВО «Воронежский государственный лесотехнический университет
имени Г.Ф. Морозова»

Аннотация. В данной работе при разработке базы данных был проведен комплексный анализ выбранной темы. Была определена важность канонических функций. Рассмотрели основные понятия алгебры логики. Привели примеры канонических форм и их применение в цифровой электронике.

Ключевые слова: СКНФ, СДНФ, логическая функция, схема, таблица истинности, минтерм, макстерм.

CANONICAL FORMS OF LOGICAL FUNCTIONS: BASICS AND APPLICATION

M.V. Shastin¹, O.L. Bordyuzha¹, E.V. Grosheva¹

¹Voronezh State University of Forestry and Technologies named after G.F. Morozov

Abstract. In this work, a comprehensive analysis of the selected topic was carried out during the development of the database. The importance of canonical functions was determined. The basic concepts of Boolean algebra were considered. Examples of canonical forms and their application in digital electronics were given.

Keywords: PCNF, PDNF, logical function, scheme, truth table, minterm, maxterm.

Введение

Каноническая форма представляет из себя стандартный способ представления логической функции, позволяющей описать функцию через основные логические операции: конъюнкция, дизъюнкция, отрицание. Она позволяет проще анализировать и преобразовывать логические функции, и может описывать сложные логические схемы.

Канонические формы делятся на совершенную дизъюнктивную нормальную форму (СДНФ) и на совершенную конъюнктивную нормальную форму (СКНФ).

Совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ) является дизъюнкцией элементарных конъюнкций, содержащих все переменные функции, причем переменные могут быть с отрицанием.

Совершенная конъюнктивная нормальная форма (СКНФ) является конъюнкцией элементарных дизъюнкций, содержащих все переменные функции, причем переменные могут быть с отрицанием.

Канонические формы функций нужны для представления логической функции в удобной для нас форме, особенно это помогает если мы работаем со сложной системой. Также они позволяют оптимизировать уже существующие логические функции. Кроме того, у каждой функции есть лишь одна каноническая форма, и это обеспечивает точность в исполнении задачи.

Основные понятия логики

Логическая функция – это функция аргументы которой, и сама функция принимают значения 0 или 1.

Если имеется n аргументов логической функции, то полное число наборов значений N этой функции составит: $N = 2^n$.

Таблица истинности – визуальный инструмент для отображения логической функции и её аргументов. Используется для упрощения восприятия логической функции

Примеры логических функций с соответствующими таблицами истинности:

Дизъюнкция: $f = a \vee b$ (ИЛИ)

Конъюнкция: $f = a \wedge b$ (И)

Исключающее ИЛИ: $f = a \oplus b$.

a	b	f		f		f
0	0	0		0		0
0	1	1		0		1
1	0	1		0		1
1	1	1		1		0

Отрицание: $f = \bar{a}$ (НЕ)

a	f
0	1
1	0

Канонические формы логических функций

Совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ) является дизъюнкцией минтермов, каждый из которых состоит из k переменных ($x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_k$), причём на i -том месте дизъюнкции стоит переменная x_i или её отрицание $\bar{x}_i$. Также все минтермы различны.

Пример: $f(x_1, x_2, x_3)$

$$f = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 \vee x_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3 \vee x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$$

Совершенная конъюнктивная нормальная форма (СКНФ) является конъюнкцией макстермов, каждый из которых состоит из k переменных ($x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_k$), причём на i -том месте конъюнкции стоит переменная x_i или её отрицание $\bar{x}_i$. Также все макстермы различны.

Пример: $f(x_1, x_2, x_3)$

$$f = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \cdot (x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) \cdot (x_1 \vee x_2 \vee x_3)$$

Переход к каноническим формам

Для перехода от таблицы истинности к СДНФ и СКНФ в таблице истинности записываются все возможные наборы аргументов логической функции, а затем для каждого набора значений аргументов проставляются значения функции.

Пример: $f(x_1, x_2, x_3)$ – число аргументов этой функции $n=3$, значит число наборов для неё составит: $N = 2^3 = 8$.

№	x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0	1
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	0

СДНФ и СКНФ образуются при помощи двух вспомогательных функций: минтерм и макстерм.

Минтерм – это функция, принимающая значение 1 только на одном наборе аргументов. Минтерм выражается через конъюнкцию аргументов, причём аргумент берётся без знака отрицания, если он равен 1, и со знаком отрицания, если он равен 0.

Макстерм – это функция, принимающая значение 0 только на одном наборе аргументов. Макстерм выражается через дизъюнкцию аргументов, причём аргумент берётся со знаком отрицания, если он равен 1, и без знака отрицания, если он равен 0.

В данном примере получаются следующие минтермы:

$$\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 \text{ и } \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 \text{ и } \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \text{ и } x_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3$$

И следующие макстермы:

$$x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3 \text{ и } \bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3 \text{ и } \bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \text{ и } \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3$$

И так как СДНФ – это дизъюнкция минтерм, она будет выглядеть следующим образом:

$$f = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 \vee \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \vee x_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3.$$

Аналогично со СКНФ – конъюнкция макстерм:

$$f = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \cdot (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \cdot (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) \cdot (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$$

Применение канонических форм

Канонические формы находят широкое применение для анализа и упрощения логических функций. Упрощение заключается в преобразовании исходного выражения в более простую форму с использованием правил алгебры логики и методов минимизации.

К примеру, можно применять алгоритм Куайна-МакКласки или метод Петрика, чтобы упростить сложные выражения до их минимальных версий с наименьшим числом термов. Минимизация функции позволяет сократить количество элементов в схеме, что, в свою очередь, снижает расходы на производство и затраты энергии.

Также следует упомянуть о комбинационных схемах, таких как мультиплексоры, дешифраторы и сумматоры. Эти схемы часто создаются на основе канонических функций. При разработке комбинационной схемы можно составить таблицу истинности для каждого выхода, а затем преобразовать её в СКНФ или СДНФ. Это помогает определить, какие логические элементы необходимы для реализации заданной функции.

Современные языки для описания аппаратного обеспечения, например, Verilog и VHDL, предоставляют возможность записывать логические функции в разных форматах, включая СДНФ и СКНФ. Это дает возможность инженерам разрабатывать сложные цифровые схемы на более высоком уровне абстракции,

в то время как компиляторы могут автоматически создавать оптимизированные схемы, основываясь на этих описаниях.

При создании программируемых логических интегральных схем (ПЛИС) и FPGA канонические формы занимают значительное место. Компилятор изучает описание схемы, которое представлено в формате логического уравнения, и определяет наиболее оптимальный способ его реализации с использованием имеющихся ресурсов, таких как LUTs, триггеры и другие элементы.

Заключение

Канонические формы логических функций играют ключевую роль в области цифровой электроники, как в теории, так и на практике. Они служат универсальными инструментами для анализа, создания и оптимизации логических схем, обеспечивая точность и высокую эффективность при проектировании сложных цифровых систем. Применение СДНФ и СКНФ, помогает не только упростить математическое описание логических функций, но и значительно снизить сложность схем, уменьшить потребление энергии и повысить надежность конечных устройств.

Использование канонических форм охватывает разнообразные задачи, начиная от проектирования комбинационных схем и заканчивая синтезом программируемых логических интегральных схем (ПЛИС) и FPGA. Современные системы автоматизации проектирования активно применяют эти формы для создания оптимальных решений, что существенно ускоряет процесс разработки и внедрения новых технологий.

Таким образом, знание базовых канонических форм логических функций и способность использовать их в реальных ситуациях являются важными факторами для эффективного решения инженерных задач в сфере цифровой электроники.

Список литературы

1. Булева функция. – URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Булева_функция.
2. Создание поведенческой модели LDMOS транзистора на основе искусственной MLP нейросети и ее описание на языке Verilog-A / С. А. Победа, М. И. Черных, Ф. В. Макаренко, К. В. Зольников // Моделирование систем и процессов. – 2021. – Т. 14, № 2. – С. 28-34. – DOI: 10.12737/2219-0767-2021-14-2-28-34.

3. Реализация оптимального построения комбинационного устройства и оценка надежности по выходному напряжению / Ф. В. Макаренко, А. С. Ягодкин, К. В. Зольников, О. А. Денисова // Моделирование систем и процессов. – 2021. – Т. 14, № 4. – С. 130-139. – DOI: 10.12737/2219-0767-2021-14-4-130-139.

4. Булевы функции. Канонические формы логических функций. Полные системы булевых функций – URL: <https://wiki.livid.pp.ru/students/cs/lectures/7.html>.

5. Методы анализа и синтеза комбинационных схем – URL: <https://studfile.net/preview/996151/>

6. Обзор логических базисов и микросхем при построении комбинационного устройства с учетом надежности / Ф. В. Макаренко, А. С. Ягодкин, К. В. Зольников, О. А. Денисова, А. В. Полуэктов // Моделирование систем и процессов. – 2022. – Т. 15, № 1. – С. 115-124.

7. Цифровая схемотехника и архитектура компьютера: RISC-V ; пер. с англ. В. С. Яценкова, А. Ю. Романова; под ред. А. Ю. Романова. – М.: ДМК Пресс, 2021. – 810 с.: ил.

8. Математическое обеспечение информационно-управляющей системы для хранения продукции с ограниченным сроком хранения / Д. В. Арапов, Н. Ю. Юдина, В. А. Курицын, Л. А. Коробова // Моделирование систем и процессов. – 2024. – Т. 17, № 1. – С. 7-18. – DOI 10.12737/2219-0767-2024-17-1-7-18. – EDN CXBIVK.

9. Высоцкая, И. А. Обоснование информационно-интеллектуальной поддержки принципов действия технических систем / И. А. Высоцкая // Моделирование систем и процессов. – 2024. – Т. 17, № 1. – С. 19-26. – DOI 10.12737/2219-0767-2024-17-1-19-26. – EDN DCEATL.

10. Высоцкая, И. А. Обоснование методов поиска принципов действия сложных технических систем и объектов / И. А. Высоцкая // Моделирование систем и процессов. – 2024. – Т. 17, № 1. – С. 27-34. – DOI 10.12737/2219-0767-2024-17-1-27-34. – EDN GASZOW.

References

1. Boolean function – URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Булева_функция.
2. Creation of a behavioral model of an LDMOS transistor based on an artificial MLP neural network and its description in Verilog-A / S. A. Pobeda, M. I. Chernykh, Ph. V. Makarenko, K. V. Zolnikov // Modeling of systems and processes. – 2021. – Vol. 14, No. 2. – Pp. 28-34. – DOI: 10.12737/2219-0767-2021-14-2-28-34.

3. Implementation of the optimal design of a combinational device and reliability assessment by output voltage / Ph. V. Makarenko, A. S. Yagodkin, K. V. Zolnikov, O. A. Denisova // Modeling of systems and processes. – 2021. – V. 14, No. 4. – P. 130-139. – DOI: 10.12737/2219-0767-2021-14-4-130-139.
4. Boolean functions. Canonical forms of logical functions. Complete systems of Boolean functions. – URL: <https://wiki.livid.pp.ru/students/cs/lectures/7.html>.
5. Methods of analysis and synthesis of combinational circuits – URL: <https://studfile.net/preview/996151/>.
6. Review of logical bases and microcircuits in the construction of a combinational device taking into account reliability/ Ph. V. Makarenko, A. S. Yagodkin, K. V. Zolnikov, O. A. Denisova, A. V. Poluektov // Modeling of systems and processes. – 2022. – V. 15, No. 1. – P. 115-124.
7. Digital circuitry and computer architecture: RISC-V ; trans. from English by V. S. Yatsenkov, A. Yu. Romanov; edited by A. Yu. Romanov. – M.: DMK Press, 2021. – 810 p.: ill.
8. Mathematical support of an information management system for storing products with a limited shelf life / D. V. Arapov, N. Yu. Yudina, V. A. Kuritsyn, L. A. Korobova // Modeling of systems and processes. – 2024. – Vol. 17, No. 1. – pp. 7-18. – DOI 10.12737/2219-0767-2024-17-1-7-18. – EDN CXBIVK.
9. Vysotskaya, I. A. Substantiation of information and intellectual support for the principles of operation of technical systems / I. A. Vysotskaya // Modeling of systems and processes. – 2024. – Vol. 17, No. 1. – pp. 19-26. – DOI 10.12737/2219-0767-2024-17-1-19-26. – EDN DCEATL.
10. Vysotskaya, I. A. Substantiation of methods for searching for principles of operation of complex technical systems and objects / I. A. Vysotskaya // Modeling of systems and processes. – 2024. – Vol. 17, No. 1. – PP. 27-34. – DOI 10.12737/2219-0767-2024-17-1-27-34. – EDN GASZOW.