

## ТЕРМОДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДРЕВЕСНОГО РОСТА

**А.Е. Писарев**

Аспирант,

*Воронежский государственный лесотехнический университет имени Г.Ф. Морозова,  
г. Воронеж, Россия*

### **Аннотация.**

Работа посвящена моделированию древесного роста для оптимизации работы секвестрирующих хозяйств и лесозаготовительных предприятий. Новизна работы заключается в применении термодинамических принципов к вопросу роста деревьев. Модель интересна для расчета инвестиционных затрат климатических проектов.

**Ключевые слова:** моделирование, лесоразведение, секвестрационный потенциал, экономика природопользования.

## THERMODYNAMIC MODEL OF TREE GROWTH

**A.E. Pisarev**

*Postgraduate student,*

*Voronezh State University of Forestry and Technologies named after G.F. Morozov, Voronezh,  
Russia*

### **Abstract.**

This paper focuses on modeling tree growth to optimize the performance of sequestration farms and logging companies. The novelty of this paper lies in its application of thermodynamic principles to tree growth. The model is useful for calculating investment costs for climate projects.

**Keywords:** modeling, afforestation, sequestration potential, environmental economics.

На сегодняшний день особенную важность приобретает экология и климат в зеленой политике развитых государств. Когда речь заходит о климате, то очевидной становится проблема углерода в атмосфере. Установлено, что углерод в виде углекислого газа (CO<sub>2</sub>), массово выбрасываемый как результат человеческой деятельности, поглощает излучаемую Землей энергию, что в свою очередь приводит к глобальному потеплению. Помимо потепления, углекислый газ в атмосфере оказывает ряд негативных воздействий на человеческий организм. Развитые государства принимают меры по снижению выбросов и количества углекислого газа в атмосфере [1]-[3]. Такими мерами являются:

1. Налоги на выбросы углекислого газа (в России не планируется введение данного налога до 2028 года);
2. Ужесточение норм и законов, связанных с выбросами, влекущие за собой технические решения, например каталитические преобразователи на автомобилях и «продвинутые» системы фильтрации;
3. Технические и естественные методы секвестрации углерода.

Одним из широко обсуждаемых путей секвестрации углерода является введение специальных древесных питомников. Если целью является максимизация секвестрации, то подход должен быть соответствующим – максимизация массы. Подход максимизации массы древесного материала также востребован в экономике, на лесозаготовке, строительстве, быту и особенно в промышленной химии (переработка целлюлозы), где габариты, форма и «качество» дерева не играют значительной роли.

Биологические системы, в частности организмы, - сложные системы, описание работы которых - трудоёмкий процесс. Живые организмы являются сложносочиненными системами, куда сложнее ядерного реактора и описание этих систем в явном виде зачастую отсутствуют. Современные работы по росту деревьев опираются на модели, связывающие их линейные размеры, анаболический уровень и скорость катаболизма[4]-[11]. Рост дерева – длительный процесс, что накладывает временные ограничения на проведения исследований. Целью данной работы является создание инструмента для нахождения барьеров роста деревьев и дальнейших исследований в сфере биологии.

В данной статье приведем подход для описания процесса роста деревьев, опирающийся на законы термодинамики. Деревья, бактерии, кошек, собак, машины, самолеты, горы, звезды и всё, что нас окружает, объединяет Энергия, закон сохранения которой универсален для всего сущего. Энергетические потоки дерева можно представить в следующем виде (без учёта корневого обмена):

1. Пополнение энергии получаемой в результате фотосинтеза
2. Затраты энергии необходимой на приращение массы дерева
3. Затраты энергии необходимой для поддержания жизненных процессов
4. Затраты энергии излучения с поверхности дерева

Построим модель оборота энергии (термодинамическую модель) в дереве в следующем виде:

$$\frac{dE}{dt} = W_p - W_{ms} - W_{ml} - W_{окр} - W_{sust}, \quad (1)$$

где  $E$  – энергия системы,  $t$ – время,  $W_p$ – мощность фотосинтеза,  $W_{ms}$  – мощность изменения древесной массы,  $W_{ml}$ –мощность изменения лиственной массы,  $W_{окр}$ – мощность обмена с окружающей средой за счет теплового излучения и конвективного теплообмена с поверхности дерева (зависит от площади древесной и лиственной массы, а также температуры дерева и окружающей температуры),  $W_{sust}$  – мощность средств к существованию (от англ. sustenance).

В соответствии с законом сохранения энергии уравнение (1) примет вид:

$$W_p - W_{ms} - W_{ml} - W_{окр} - W_{sust} = 0.$$

Отсюда выразим приращение древесной массы

$$W_{ms} = W_p - W_{ml} - W_{окр} - W_{sust}.$$

Мощности изменения древесной и лиственной массы можно записать в виде

$$W_{ms} = \frac{dE_{ms}}{dt},$$

$$W_{ml} = \frac{dE_{ml}}{dt},$$

где  $E_{ms}$  и  $E_{ml}$  – энергии древесной массы и лиственной массы соответственно. Эти энергии связаны с массой следующим образом

$$E_{ms} = H_{ms} * m_s * h_s,$$

$$E_{ml} = H_{ml} * m_l * h_l,$$

где  $H_{ms}$  – энтальпия (энергия химической связи) древесной массы, состав которой известен (70-80% холоцеллюлоза, 20-30% лигнин),  $m_s$  – древесная масса,  $h_s$  – коэффициент преобразования энергии (аналог КПД, зависит от внешних факторов и варьируется от 0 до 1, но в целом константа),  $H_{ms}$  – константа,  $m_s$  – масса. Для лиственной массы обозначения эквивалентны.

Тогда приращение древесной массы выражается уравнением

$$H_{ms} h_s \frac{dm_s}{dt} = W_p - H_{ml} h_l \frac{dm_l}{dt} - W_{окр} - W_{sust}. \quad (2)$$

Мощность средств к существованию также разделима на две составляющие

$$W_{sust} = W_{ss} + W_{sl},$$

где  $W_{ss}$  и  $W_{sl}$  – мощность средств к существованию древесной массы и лиственной соответственно.

Разделение древесной и лиственной массы в модели обусловлено тем, что в зимний период (для лиственных деревьев) затрачивать энергию на поддержание листвы не является необходимым, по наступлении весны необходимо затратить энергию на регенерацию листвы.

Мощность средств к существованию является функцией, зависящей от массы дерева и температуры

$$W_{sust} = f(m_s, m_l, T).$$

Определение данной функции будет произведено в будущих работах. Данную функцию можно экспериментально вывести, собрав статистические данные по переменным входящим в уравнение(2).

Мощность обмена с окружающей средой при идеализированных условиях можно не учитывать, однако реальная жизнь не идеальна, часть энергии переходит в тепло, которое без теплообмена с окружающей средой сожгло бы дерево. Уравнение (2) без теплопотерь при коэффициентах преобразования энергии равных 1 будет иметь вид

$$H_{ms} \frac{dm_s}{dt} = W_p - H_{ml} \frac{dm_l}{dt} - W_{sust}. \quad (3)$$

Для случая отсутствия сезонности и зимы можно соединить древесную массу с лиственной и получить

$$H_{mt} \frac{dm_t}{dt} = W_p - W_{sust}, \quad (4)$$

где  $H_{mt}$  и  $m_t$  – энтальпия дерева и масса дерева соответственно,  $W_{sust} = f(m_t)$ .

Энергия, получаемая в результате фотосинтеза ( $W_p$ ) зависит от площади лиственного покрова  $S_l$ , коэффициента преобразования энергии  $h_p$  и эффективной инсоляции  $q_{in}$ :

$$W_p = q_{in} * S_l * h_p$$

Площадь листвы прямо пропорциональна массе листвы

$$m_l = S_l * d_l * \rho_l,$$

где  $d_l$  – толщина листа,  $\rho_l$  – плотность листа. Тогда:

$$W_p = \frac{q_{in} * m_l * h_p}{d_l * \rho_l}$$

Будем считать, что масса листвы прямо пропорциональна массе дерева, а именно  $m_l = k * m_t$ , примем  $h_p = 1$  ввиду упрощения, тогда

$$H_{mt} \frac{dm_t}{dt} = \frac{q_{in} * k * m_t}{d_l * \rho_l} - W_{sust}.$$

Решение данного уравнения будет представлять собой характерную экспоненциальную зависимость, и в зависимости от значения  $W_{sust}$  будет изменяться график экспоненты. В случае прямой зависимости  $W_{sust}$  от массы дерева  $m_t$  ( $W_{sust} = C * m_t$ ) решение данного уравнения примет вид:

$$m_t = m_{t0} \exp\left(\frac{\frac{q_{in} * k}{d_l * \rho_l} - C}{H_{mt}} t\right), \quad (5)$$

где  $m_{t0}$  – масса в начальный момент времени,  $C$  – коэффициент пропорциональности для  $W_{sust}$  и  $m_t$ .

В случае непрямо пропорциональности  $W_{sust}$  массе дерева решение примет другой вид. Если скорость изменения  $W_{sust}(m_t)$  больше, чем  $W_p(m_t)$ , то в определенный момент времени рост дерева остановится либо выйдет на плато. Если скорость изменения  $W_{sust}(m_t)$  меньше, чем  $W_p(m_t)$ , то дерево растет неограниченно. При сравнении с другими моделями и эмпирическими данными мы можем как раз таки наблюдать характерное поведения функции роста (рисунок 1 и 2):

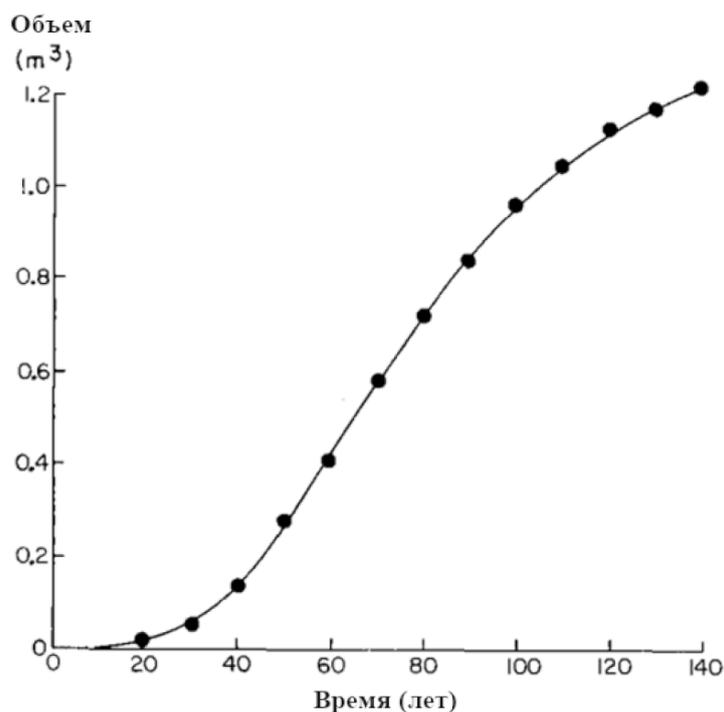


Рисунок 1 - Подогнанная кривая роста объема ствола ели[10].

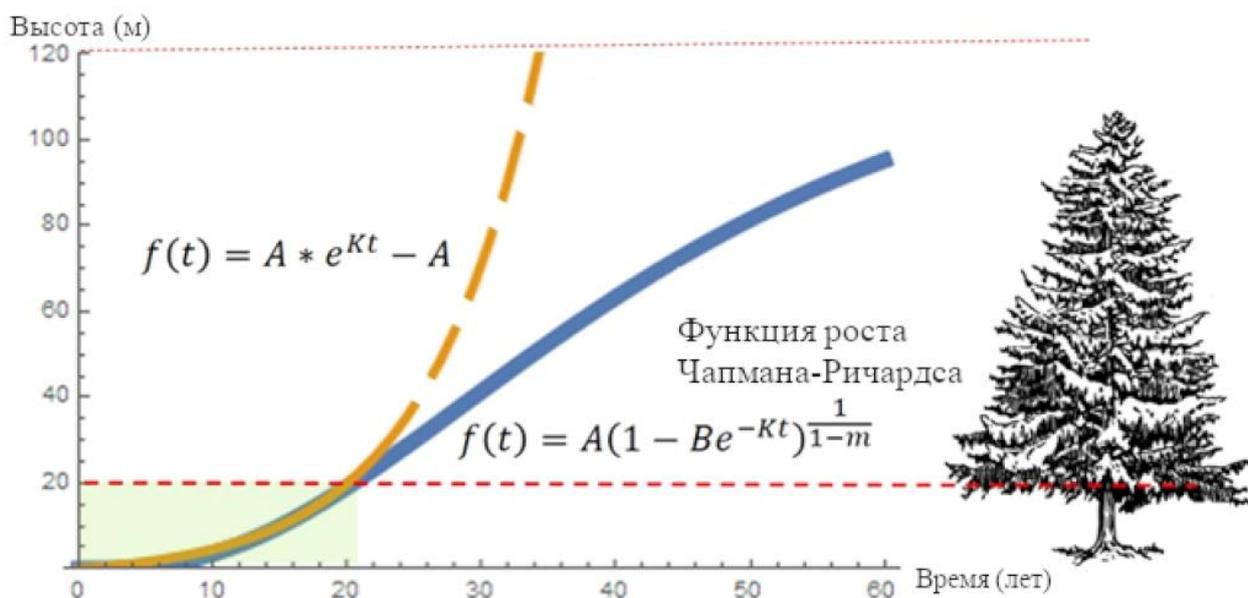


Рисунок 2 - Концептуальная иллюстрация моделей траектории роста деревьев [4]

Рассмотрим некоторые частные случаи уравнения (2), режимы роста. В зимний период, в силу отсутствия листвы,  $W_p = 0$ ,  $W_{sl} = 0$  и  $H_{ml} h_l \frac{dm_l}{dt} = 0$ , тогда самоподдержание дерева происходит за счёт накопленной массы (в виде питательных веществ), масса уменьшается

$$H_{ms} \frac{dm_s}{dt} = -W_{ss}.$$

В момент пробуждения дерева, для регенерации листвы требуется энергия, эта энергия, в соответствии с уравнением (3) преобразуется из массы дерева

$$H_{ms} \frac{dm_s}{dt} = -H_{ml} \frac{dm_l}{dt}.$$

Ночью, когда фотосинтез не происходит, содержание дерева происходит за счёт массы

$$H_{ms} \frac{dm_s}{dt} = -H_{ml} \frac{dm_l}{dt} - W_{sust}.$$

При работе дерева на «полную мощность», когда  $W_p \geq -H_{ml} \frac{dm_l}{dt} - W_{sust}$  происходит увеличение массы дерева и рост.

Возвращаясь к вопросу максимизации массы дерева, можно заключить, что определение максимального роста «замыкается» на функции мощности средств к существованию. Когда  $W_{sust}$  прямо пропорциональна  $m_t$ , то рост постоянен, и максимума рост не достигает, в случае, когда  $W_{sust}$  зависит в большей степени от  $m_t$ , а  $W_p$  – в меньшей степени от  $m_t$ , может случиться замедление роста, и момент замедления данного роста является моментом рубки дерева.

Таким образом, мы положили основу для дальнейшего изучения и оптимизации древесного роста. В дальнейших работах будут подробно рассмотрены члены уравнения (2) и их влияние на дерево. Помимо этого, будут более подробно рассмотрены режимы жизнедеятельности дерева.

### Список литературы

1. Alex Mengden / Carbon Taxes in Europe, 2024 // June 18, 2024
2. Priyadarshi R. Shukla Jim Skea / Climate Change 2022 Mitigation of Climate Change Summary for Policymakers // © 2022 Intergovernmental Panel on Climate Change
3. Pierre Friedlingstein, Michael O'Sullivan / Global Carbon Budget 2022 // Earth System Science Data Volume 14, issue 11
4. Yang Liu & Yousry A. El-Kassaby / Evapotranspiration and favorable growing degree-days are key to tree height growth and ecosystem functioning: Meta-analyses of Pacific Northwest historical data // Scientific Reports | (2018) 8:8228 | DOI:10.1038/s41598-018-26681-1
5. Xavier Le Rouxa, , André Lacoitea / Carbon-based models of individual tree growth: A critical appraisal // Ann. For. Sci. 58 (2001) 469–506 469 © INRA, EDP Sciences, 2001
6. Reffye, Ph. de, Fourcaud, Th., Blaise, F., Barthelemy, D. & Houllier, F. 1997. / A functional model of tree growth and tree architecture. // Silva Fennica 31(3): 297-311.
7. Michael G. Ryan and Barbara J. Yoder / Hydraulic Limits to Tree Height and Tree Growth // BioScience Vol. 47, No. 4 (Apr., 1997), pp. 235-242
8. Food and Agriculture Organization of the United Nations / <https://www.fao.org/4/ad228e/AD228E02.htm>, <https://www.fao.org/4/ac121e/ac121e08.htm> // дата посещения 20.09.2025
9. Jennifer Franklin, David Mercker <https://plantsciences.tennessee.edu/wp-content/uploads/sites/25/2021/11/Tree-growth-characteristics-UT-Publication-W227.pdf>
10. L. V. PIENAAR K. J. TURNBULL / The Chapman-Richards Generalization of Von Bertalanffy's Growth Model for Basal Area Growth and Yield in Even Aged Stands // Forest Science volume 19, number 1, 1973
11. THOMAS HTCKLER, BENJAMIN SMITH, / USING A GENERALIZED VEGETATION MODEL TO SIMULATE VEGETATION DYNAMICS IN NORTHEASTERN USA // Ecology, 85(2). 2004, pp. 519-530, 2004 by the Ecological Society of America

### References

1. Alex Mengden / Carbon Taxes in Europe, 2024 // June 18, 2024
2. Priyadarshi R. Shukla Jim Skea / Climate Change 2022 Mitigation of Climate Change Summary for Policymakers // © 2022 Intergovernmental Panel on Climate Change
3. Pierre Friedlingstein, Michael O'Sullivan / Global Carbon Budget 2022 // Earth System Science Data Volume 14, issue 11
4. Yang Liu & Yousry A. El-Kassaby / Evapotranspiration and favorable growing degree-days are key to tree height growth and ecosystem functioning: Meta-analyses of Pacific Northwest historical data // Scientific Reports | (2018) 8:8228 | DOI:10.1038/s41598-018-26681-1
5. Xavier Le Rouxa, , André Lacoitea / Carbon-based models of individual tree growth: A critical appraisal // Ann. For. Sci. 58 (2001) 469–506 469 © INRA, EDP Sciences, 2001

6. Reffye, Ph. de, Fourcaud, Th., Blaise, F., Barthelemy, D. & Houllier, F. 1997. / A functional model of tree growth and tree architecture. // *Silva Fennica* 31(3): 297-311.
7. Michael G. Ryan and Barbara J. Yoder / Hydraulic Limits to Tree Height and Tree Growth // *BioScience* Vol. 47, No. 4 (Apr., 1997), pp. 235-242
8. Food and Agriculture Organization of the United Nations / <https://www.fao.org/4/ad228e/AD228E02.htm>, <https://www.fao.org/4/ac121e/ac121e08.htm> // date of visit 20.09.2025
9. Jennifer Franklin, David Mercker <https://plantsciences.tennessee.edu/wp-content/uploads/sites/25/2021/11/Tree-growth-characteristics-UT-Publication-W227.pdf>
10. L. V. PIENAAR K. J. TURNBULL / The Chapman-Richards Generalization of Von Bertalanffy's Growth Model for Basal Area Growth and Yield in Even Aged Stands // *Forest Science* volume 19, number 1, 1973
11. THOMAS HTCKLER, BENJAMIN SMITH, / USING A GENERALIZED VEGETATION MODEL TO SIMULATE VEGETATION DYNAMICS IN NORTHEASTERN USA // *Ecology*, 85(2). 2004, pp. 519-530, 2004 by the Ecological Society of America