

КЛАССИЧЕСКИЙ ГАРМОНИЧЕСКИЙ СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ В МОДЕЛИ ОТТАЛКИВАНИЯ С РАДИАЦИОННЫМ ТРЕНИЕМ ТОЧЕЧНЫХ ЗАРЯДОВ

А.С. Дубровин, В.И. Сумин

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный лесотехнический университет
имени Г.Ф. Морозова»

В работе представлен с использованием методологии классического гармонического системного анализа в рамках физической концепции дальнего действия способ математического моделирования сложной нелинейной физической системы с двумя взаимно отталкивающимися тривиальными подсистемами в виде заряженных материальных точек, которые при отталкивании испытывают радиационное трение за счет потери энергии на излучение. Приведенные результаты расчетов подтверждают работоспособность предложенного подхода.

Ключевые слова: системный анализ, обработка информации, сложная система, гармонический анализ, ряды Фурье, модель отталкивания, дальнее действие, радиационное трение, заряженная материальная точка, точечный заряд.

CLASSICAL HARMONIC SYSTEMS ANALYSIS AND INFORMATION PROCESSING IN THE REPULSION MODEL WITH RADIATIVE FRICTION OF POINT CHARGES

A.S. Dubrovin, V.I. Sumin

Voronezh State University of Forestry and Technologies named after G.F. Morozov

The paper presents a method for mathematically modeling a complex nonlinear physical system using classical harmonic system analysis within the physical concept of action at a distance. The system consists of two mutually repulsive trivial subsystems, each consisting of charged material point. These particles, when repelled, experience radiative friction due to energy loss through radiation. The presented calculation results confirm the viability of the proposed approach.

Keywords: systems analysis, information processing, complex system, harmonic analysis, Fourier series, repulsion model, action at a distance, radiative friction, charged material point, point charges.

Методы системного анализа, развиваемые авторами настоящей статьи применительно к сложным системам различной природы и назначения (в частности, к сложным организационным системам, моделируемым в [1, 2]), имеют достаточно универсальный, всеобъемлющий характер и распространяются в том числе на организационно-технические и технические сложные системы, а также на физические сложные системы, физические процессы в которых аналогичны физическим процессам в соответствующих организационно-технических и технических сложных системах (такая физическая сложная система моделировалась в [3, 4]). Впервые эта физическая сложная система с дальнодействующим отталкиванием ее подсистем рассмотрена в [3]. Соответствующее системное моделирование достаточно полно проведено в [4]. На примере математического моделирования этой сложной системы в работах [3, 4] заложены теоретические основы нового направления системного анализа – классического гармонического системного анализа, интегрирующего методы системного анализа с методами классического гармонического анализа.

Цель настоящей статьи состоит в представлении с использованием методологии классического гармонического системного анализа в рамках физической концепции дальнодействия способа математического моделирования с соответствующей обработкой информации при этом моделировании применительно к сложной нелинейной физической системе с двумя взаимно отталкивающимися тривиальными подсистемами в виде заряженных материальных точек (ЗМТ) или, иначе говоря, обладающих массой точечных зарядов (ТЗ), которые при таком отталкивании испытывают радиационное трение за счет энергетических потерь на излучение.

В рамках физической концепции дальнодействия сила радиационного трения дается не теоретико-полевой формулой Лоренца-Абрагама-Дирака или родственных ей, а формулой Лоренца. В простейшем случае одинаковых ТЗ они обладают единой массой m , единым зарядом Q , единым (с учетом радиационного трения) начальным ускорением $R_2 = \ddot{r}(-a)$, описываются единой динамической переменной (зависимость модуля радиус-вектора, измеряемого в

световых секундах, от времени $t \in [-a, a]$, где $a = T/2 > 0$, $T > 0$, измеряемого в секундах) r без учета радиационного трения и r_0 с его учетом, который дает поправку $\tilde{r} \equiv r_0 - r$. Использование световых секунд (с.с.) приводит к единичной скорости света в вакууме и пересчитанной электрической постоянной $\bar{\varepsilon}_0 = c^3 \varepsilon_0$ с.с. $^{-3} \text{кг}^{-1} \text{с}^4 \text{А}^2$, где c , ε_0 – исходные (в СИ) постоянная скорости света и электрическая постоянная. Зависимость между зарядом ТЗ Q и его массой m параметризуется числовым параметром $\theta = 6\pi\bar{\varepsilon}_0 m/Q^2$. Дифференциальные уравнения динамики данной сложной системы с учетом радиационного трения и без него имеют соответственно вид [4]:

$$(\theta\ddot{r} - \ddot{r})r^2 = 0,375; \quad (1)$$

$$\ddot{r}_0 r_0^2 = 0,375/\theta. \quad (2)$$

Зависимость между начальным ускорением ТЗ $R_2 = \ddot{r}(-a)$ для дифференциального уравнения (1) и начальным ускорением ТЗ $\ddot{r}_0(-a)$ для дифференциального уравнения (2) параметризуется числовым параметром

$$\xi = R_2/\ddot{r}_0(-a) \in (0;1).$$

Для проведения вычислительного эксперимента зададим задачи Коши для дифференциальных уравнений (1), (2) соответственно следующим образом:

$$r(-a) = R_0/2 = 1, \dot{r}(-a) = 0, \ddot{r}(-a) = R_2 = \xi\ddot{r}_0(-a) = \xi C_0/r_0^2(-a) = 0,3; \quad (3)$$

$$r_0(-a) = R_0/2 = 1, \dot{r}_0(-a) = 0. \quad (4)$$

Классический гармонический системный анализ проводится для задач Коши (1), (3) и (2), (4) при исходных данных, которые задают цель данной сложной системы в виде минимальных $r_{\min} \in [0, +\infty]$, $v_{\min} \in [0, +\infty]$ и максимальных $r_{\max} \in [0, +\infty]$, $v_{\max} \in [0, +\infty]$ значений приемлемого варьирования модулей радиус-векторов и скоростей ТЗ соответственно в пределах их целевых диапазонов. При таких исходных данных своевременность (за промежуток времени, не превышающий T) достижения системой своей цели с учетом и без учета радиационного трения или, иначе говоря, для задач Коши (1), (3) и (2), (4) определяется соответственно следующими булевозначными характеристиками:

$$\Psi = \Psi(r_{\min}, r_{\max}, v_{\min}, v_{\max}) = (r(a) \in (r_{\min}, r_{\max})) \wedge (\dot{r}(a) \in (v_{\min}, v_{\max})), \quad (5)$$

$$\bar{\Psi} = \bar{\Psi}(r_{\min}, r_{\max}, v_{\min}, v_{\max}) = (r_0(a) \in (r_{\min}, r_{\max})) \wedge (\dot{r}_0(a) \in (v_{\min}, v_{\max})). \quad (6)$$

Для приближенной оценки величин $r(a)$, $\dot{r}(a)$, входящих в выражение (5) и величин $r_0(a)$, $\dot{r}_0(a)$, входящих в выражение (6), используется, согласно [4], метод быстрых разложений для приближенного решения задач Коши (1), (3) и (2), (4) соответственно, в виде быстрых разложений $\hat{r}_{pN}(t) \approx r(t)$, $\hat{r}_{0pN}(t) \approx r_0(t)$, где p – порядок полиномиальной граничной функции быстрого разложения, N – номер последнего члена ряда Фурье быстрого разложения. Для производных любого порядка $n = \overline{0, +\infty}$ действуют следующие очевидные аппроксимации: $\hat{r}_{pN}^{(n)} \approx r^{(n)}$, $\hat{r}_{0pN}^{(n)} \approx r_0^{(n)}$, $\check{r}_{pN}^{(n)} \equiv \hat{r}_{0pN}^{(n)} - \hat{r}_{pN}^{(n)} \approx \check{r}^{(n)}$.

Третий порядок дифференциального уравнения (1) регламентирует использование быстрых разложений с выполнением условия $p \geq 3 \times 2 = 6$, $N \geq 1$. Стремление к максимальной простоте вычислений с одновременным выполнением указанного условия дает требуемые для этого характеристики быстрых разложений: $p = 6$, $N = 1$. Тем самым, используются быстрые разложения $\hat{r}_{61}(t) \approx r(t)$, $\hat{r}_{061}(t) \approx r_0(t)$ и их производные $\hat{r}_{61}^{(n)} \approx r^{(n)}$, $\hat{r}_{061}^{(n)} \approx r_0^{(n)}$, $\check{r}_{61}^{(n)} \equiv \hat{r}_{061}^{(n)} - \hat{r}_{61}^{(n)} \approx \check{r}^{(n)}$. Классический гармонический системный анализ при этом направлен на получение сначала каузальных числовых характеристик $\hat{r}_{61}(a)$, $\dot{\hat{r}}_{61}(a)$, $\hat{r}_{061}(a)$, $\dot{\hat{r}}_{061}(a)$ модели сложной системы, а затем зависящих от них аксиологических характеристик Λ_{61} , $\bar{\Lambda}_{61}$ этой модели, соответствующих целевым характеристикам Ψ , $\bar{\Psi}$ сложной системы, которые вычисляются с использованием индикаторной функции $\mathbf{1}_{\bullet}(\bullet)$ следующим образом:

$$\Lambda_{61} = \Lambda_{61}(r_{\min}, r_{\max}, v_{\min}, v_{\max}) = \mathbf{1}_{(r_{\min}, r_{\max})}(\hat{r}_{61}(a)) \mathbf{1}_{(v_{\min}, v_{\max})}(\dot{\hat{r}}_{61}(a)), \quad (7)$$

$$\bar{\Lambda}_{61} = \bar{\Lambda}_{61}(r_{\min}, r_{\max}, v_{\min}, v_{\max}) = \mathbf{1}_{(r_{\min}, r_{\max})}(\hat{r}_{061}(a)) \mathbf{1}_{(v_{\min}, v_{\max})}(\dot{\hat{r}}_{061}(a)). \quad (8)$$

В развернутом виде (с подробной записью удерживаемых членов рядов Фурье и используемых полиномиальных граничных функций с их быстрыми полиномами) быстрые разложения $\hat{r}_{61}(t)$, $\hat{r}_{061}(t)$ записываются, как функции времени t с десятью независимыми параметрами каждое (A_q , $q = \overline{0, 6}$, a_0 , a_1 , b_1 для $\hat{r}_{61}(t)$ и A_{0q} , $q = \overline{0, 6}$, a_{00} , a_{01} , b_{01} для $\hat{r}_{061}(t)$) в следующем виде:

$$\begin{aligned}\hat{r}_{61}(t) = & A_0 \frac{t}{2a} + A_1 \frac{t^2}{4a} + A_2 \left(\frac{t^3}{12a} - \frac{at}{12} \right) + A_3 \left(\frac{t^4}{48a} - \frac{at^2}{24} \right) + \\ & + A_4 \left(\frac{t^5}{240a} - \frac{at^3}{72} + \frac{7a^3t}{720} \right) + A_5 \left(\frac{t^6}{1440a} - \frac{at^4}{288} + \frac{7a^3t^2}{1440} \right) + \\ & + \frac{A_6}{1440} \left(\frac{t^7}{7a} - at^5 + \frac{7a^3t^3}{3} - \frac{31a^5t}{21} \right) + a_0 + a_1 \cos \frac{\pi t}{a} + b_1 \sin \frac{\pi t}{a}\end{aligned}\quad (9)$$

$$\begin{aligned}\hat{r}_{061}(t) = & A_{00} \frac{t}{2a} + A_{01} \frac{t^2}{4a} + A_{02} \left(\frac{t^3}{12a} - \frac{at}{12} \right) + A_{03} \left(\frac{t^4}{48a} - \frac{at^2}{24} \right) + \\ & + A_{04} \left(\frac{t^5}{240a} - \frac{at^3}{72} + \frac{7a^3t}{720} \right) + A_{05} \left(\frac{t^6}{1440a} - \frac{at^4}{288} + \frac{7a^3t^2}{1440} \right) + \\ & + \frac{A_{06}}{1440} \left(\frac{t^7}{7a} - at^5 + \frac{7a^3t^3}{3} - \frac{31a^5t}{21} \right) + a_{00} + a_{01} \cos \frac{\pi t}{a} + b_{01} \sin \frac{\pi t}{a}\end{aligned}\quad (10)$$

Значения всех двадцати параметров быстрых разложений (9), (10) находятся, как решение системы двадцати нелинейных алгебраических уравнений, регламентируемой методом быстрых разложений. Полученные в результате двадцать чисел однозначно определяют данные быстрые разложения, как функции времени t . Шестикратным дифференцированием быстрых разложений (9), (10) с найденными значениями всех двадцати параметров последовательно получают производные $\hat{r}_{61}^{(s)}(t)$, $\hat{r}_{061}^{(s)}(t)$, $s = \overline{0,6}$. При $t = a$ эти производные представляют собой основные каузальные характеристики $\hat{r}_{61}^{(s)}(a)$, $\hat{r}_{061}^{(s)}(a)$, $s = \overline{0,6}$ модели сложной системы. Производные $\check{r}_{61}^{(s)}(t) \equiv \hat{r}_{061}^{(s)}(t) - \hat{r}_{61}^{(s)}(t)$, $s = \overline{0,6}$ функции поправки $\check{r}_{61}(t)$ вычисляются, как разности соответствующих производных. При $t = a$ эти производные представляют собой дополнительные каузальные характеристики $\check{r}_{61}^{(s)}(a)$, $s = \overline{0,6}$, знания которых, впрочем, не требуется для нахождения аксиологических характеристик Λ_{61} , $\bar{\Lambda}_{61}$ модели сложной системы по формулам (7), (8), как не требуется и знания основных каузальных характеристик $\hat{r}_{61}^{(s)}(a)$, $\hat{r}_{061}^{(s)}(a)$, $s = \overline{2,6}$ в отличие от $\hat{r}_{61}^{(s)}(a)$, $\hat{r}_{061}^{(s)}(a)$, $s = \overline{0,1}$, знание которых для нахождения указанных аксиологических характеристик необходимо наряду со знанием исходных данных системного анализа $r_{\min}$, $r_{\max}$, $v_{\min}$, $v_{\max}$.

Траектории тривиальных подсистем сложной системы, показывающие ее динамику, наглядно представлены на рисунке 1, где по оси абсцисс откладывается время t , а по оси ординат – модуль радиус-вектора ТЗ, который в

случае наличия учета радиационного трения обозначается через r и аппроксимируется быстрым разложением $\hat{r}_{61}(t)$ (средняя кривая синего цвета) по формуле (9), а в случае отсутствия учета радиационного трения обозначается через r_0 и аппроксимируется быстрым разложением $\hat{r}_{061}(t)$ (верхняя кривая красного цвета) по формуле (10). Нижняя кривая зеленого цвета на этом рисунке является графиком функции $\tilde{r}_{61}(t)$ и демонстрирует влияние силы радиационного трения.

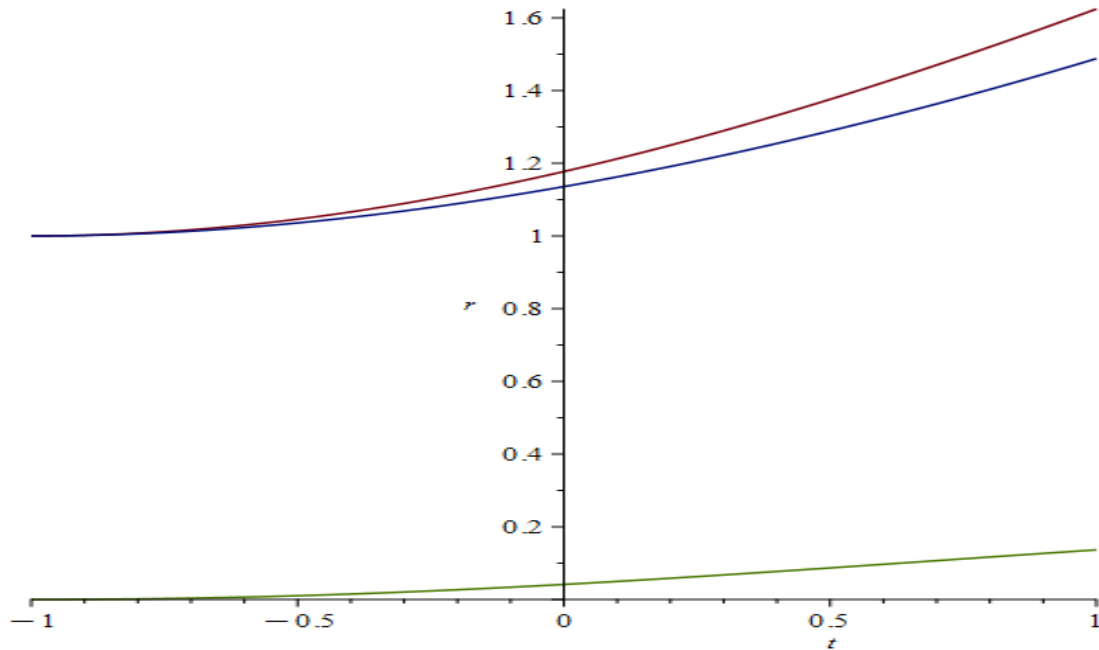


Рисунок 1 – Траектории тривиальных подсистем сложной системы

Каузальные характеристики модели сложной системы, полученные в результате проведения вычислительного эксперимента, представлены в таблице 1. В верхней части этой таблицы представлены следующие основные каузальные характеристики для случая наличия учета радиационного трения: $\hat{r}_{61}(a)$, $\dot{\hat{r}}_{61}(a)$, $\ddot{\hat{r}}_{61}(a)$, $\ddot{\hat{r}}_{61}(a)$, $\hat{r}_{61}^{(4)}(a)$, $\hat{r}_{61}^{(5)}(a)$, $\hat{r}_{61}^{(6)}(a)$ (обозначения – во второй строке, а численные значения – в третьей). В первой строке этой таблицы приведены обозначения системных характеристик сложной системы, соответствующих представленным каузальным характеристикам модели сложной системы: $r(a)$, $\dot{r}(a)$, $\ddot{r}(a)$, $\ddot{r}(a)$, $r^{(4)}(a)$, $r^{(5)}(a)$, $r^{(6)}(a)$. В средней части этой таблицы представлены следующие основные каузальные характеристики для случая отсутствия учета радиационного трения: $\hat{r}_{061}(a)$, $\dot{\hat{r}}_{061}(a)$, $\ddot{\hat{r}}_{061}(a)$, $\ddot{\hat{r}}_{061}(a)$, $\hat{r}_{061}^{(4)}(a)$, $\hat{r}_{061}^{(5)}(a)$, $\hat{r}_{061}^{(6)}(a)$ (обозначения – в пятой строке, а численные значения – в

шестой). В четвертой строке этой таблицы приведены обозначения системных характеристик сложной системы, соответствующих представленным каузальным характеристикам модели сложной системы: $r_0(a)$, $\dot{r}_0(a)$, $\ddot{r}_0(a)$, $\ddot{\ddot{r}}_0(a)$, $r_0^{(4)}(a)$, $r_0^{(5)}(a)$, $r_0^{(6)}(a)$. В нижней части этой таблицы представлены следующие дополнительные каузальные характеристики: $\tilde{r}_{61}(a)$, $\dot{\tilde{r}}_{61}(a)$, $\ddot{\tilde{r}}_{61}(a)$, $\ddot{\ddot{\tilde{r}}}_{61}(a)$, $\tilde{r}_{61}^{(4)}(a)$, $\tilde{r}_{61}^{(5)}(a)$, $\tilde{r}_{61}^{(6)}(a)$ (обозначения – в восьмой строке, а численные значения – в девятой). В седьмой строке этой таблицы приведены обозначения системных характеристик сложной системы, соответствующих представленным каузальным характеристикам модели сложной системы: $\tilde{r}(a)$, $\dot{\tilde{r}}(a)$, $\ddot{\tilde{r}}(a)$, $\ddot{\ddot{\tilde{r}}}(a)$, $\tilde{r}^{(4)}(a)$, $\tilde{r}^{(5)}(a)$, $\tilde{r}^{(6)}(a)$.

Аксиологические характеристики сложной системы, полученные в результате проведения вычислительного эксперимента, представлены в таблице 2. Видно, что учет радиационного трения приводит к выводу о несвоевременности достижения цели системой, хотя без такового учета вывод следовал противоположный. Тем самым, такой учет может оказаться весьма полезным.

Таблица 1 – Каузальные характеристики сложной системы

$r(a)$	$\dot{r}(a)$	$\ddot{r}(a)$	$\ddot{\ddot{r}}(a)$	$r^{(4)}(a)$	$r^{(5)}(a)$	$r^{(6)}(a)$
$\hat{r}_{61}(a)$	$\hat{\dot{r}}_{61}(a)$	$\hat{\ddot{r}}_{61}(a)$	$\hat{\ddot{\ddot{r}}}_{61}(a)$	$\hat{r}_{61}^{(4)}(a)$	$\hat{r}_{61}^{(5)}(a)$	$\hat{r}_{61}^{(6)}(a)$
1,488	0,441	0,170	–0,000	0,092	–0,011	–0,220
$r(a)$	$\dot{r}(a)$	$\ddot{r}(a)$	$\ddot{\ddot{r}}(a)$	$r^{(4)}(a)$	$r^{(5)}(a)$	$r^{(6)}(a)$
$\hat{r}_{061}(a)$	$\hat{\dot{r}}_{061}(a)$	$\hat{\ddot{r}}_{061}(a)$	$\hat{\ddot{\ddot{r}}}_{061}(a)$	$\hat{r}_{061}^{(4)}(a)$	$\hat{r}_{061}^{(5)}(a)$	$\hat{r}_{061}^{(6)}(a)$
1,624	0,537	0,143	–0,082	0,160	0,369	0,814
$\tilde{r}(a)$	$\dot{\tilde{r}}(a)$	$\ddot{\tilde{r}}(a)$	$\ddot{\ddot{\tilde{r}}}(a)$	$\tilde{r}^{(4)}(a)$	$\tilde{r}^{(5)}(a)$	$\tilde{r}^{(6)}(a)$
$\tilde{r}_{61}(a)$	$\dot{\tilde{r}}_{61}(a)$	$\ddot{\tilde{r}}_{61}(a)$	$\ddot{\ddot{\tilde{r}}}_{61}(a)$	$\tilde{r}_{61}^{(4)}(a)$	$\tilde{r}_{61}^{(5)}(a)$	$\tilde{r}_{61}^{(6)}(a)$
0,137	0,096	–0,027	–0,081	0,068	0,380	1,034

Таблица 2 – Аксиологические характеристики сложной системы

$r_{\min}$	$r_{\max}$	$v_{\min}$	$v_{\max}$	Λ_{61}	$\bar{\Lambda}_{61}$
1,5	$+\infty$	0,5	$+\infty$	0	1

Таким образом, приведенные результаты (рисунок 1, таблица 1, таблица 2) расчетов, проведенных в ходе вычислительного эксперимента, подтверждают работоспособность предложенного подхода.

Список литературы

1. Сумин, В.И. Особенности выбора членов экспертной группы для анализа функционирования сложной организационной системы силовых структур / В.И. Сумин, А.С. Дубровин, И.С. Кущева // Моделирование систем и процессов. – 2024. – Т. 17, № 4. – С. 77-83.
2. Сумин, В.И. Разработка математической модели оптимизации процесса обучения курсантов силовых структур в высших учебных заведениях как сложной системы / В.И. Сумин, А.С. Дубровин, С.В. Родин, В.К. Зольников // Моделирование систем и процессов. – 2023. – Т. 16, № 3. – С. 70-78.
3. Дубровин, А.С. Гармонический системный анализ и обработка информации в модели дальнего действия взаимно отталкивающихся точечных зарядов / А.С. Дубровин // Вестник Воронежского института ФСИИ России. – 2023. – № 2. – С. 42-49.
4. Дубровин, А.С. Системное моделирование отталкивания с радиационным трением точечных зарядов на основе классического гармонического анализа / А.С. Дубровин, В.И. Сумин, А.С. Кравченко // Экономика. Информатика. – 2025. – Т. 52, № 3. – С. 623-641.

References

1. Sumin, V.I. Features of the selection of members of the expert group for the analysis of the functioning of a complex organizational system of law enforcement agencies / V.I. Sumin, A.S. Dubrovin, I.S. Kushcheva // Modeling of systems and processes. – 2024. – V. 17, No. 4. – pp. 77-83.
2. Sumin, V.I. Development of a mathematical model for optimizing the process of training cadets of law enforcement agencies in higher educational institutions as a complex system / V.I. Sumin, A.S. Dubrovin, S.V. Rodin, V.K. Zolnikov // Modeling of systems and processes. – 2023. – V. 16, No. 3. – pp. 70-78.
3. Dubrovin, A.S. Harmonic system analysis and information processing in the long-range model of mutually repulsive point charges / A.S. Dubrovin // Bulletin of the Voronezh Institute of the Federal Penitentiary Service of Russia. – 2023. – No. 2. – pp. 42-49.
4. Dubrovin, A.S. Systemic modeling of repulsion with radiative friction of point charges based on classical harmonic analysis / A.S. Dubrovin, V.I. Sumin, A.S. Kravchenko // Economics. Information technologies. – 2025. – V. 52, No. 3. – pp. 623-641.