

DOI: 10.58168/OpEq2025_20-26

УДК 517.923

ЗАДАЧА О ДЕФОРМАЦИИ ОБЪЕКТОВ СЕТЕВОЙ СТРУКТУРЫ
THE PROBLEM OF DEFORMATION OF NETWORK STRUCTURE OBJECTS

Белоглазова Татьяна Владимировна

кандидат физико-математических наук, доцент,

ВУНЦ ВВС «ВВА имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина»,

Воронеж, Россия

Евсюкова Валентина Петровна

доцент кафедры математики и физики, кандидат технических наук,

Воронежский государственный аграрный университет

имени императора Петра I, Воронеж, Россия

Шишкин Михаил Сергеевич

ВУНЦ ВВС «ВВА имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина»,

Воронеж, Россия

Beloglazova Tatiana Vladimirovna

Associate Professor, Candidate of Physical and Mathematical Sciences,

VUNTS of the Air Force

"VVA named after Prof. N.E. Zhukovsky and Yu.A. Gagarin", Voronezh, Russia

Evsyukova Valentina Petrovna

Associate Professor, Candidate of Technical Sciences,

Department of Mathematics and Physics,

Voronezh State Agrarian University named after Emperor Peter the Great,

Voronezh, Russia

Shishkin Mihail Sergeevich

VUNTS of the Air Force

"VVA named after Prof. N.E. Zhukovsky and Yu.A. Gagarin", Voronezh, Russia

Аннотация. В статье представлена математическая модель для расчета деформации объектов сетевой структуры в результате точечного воздействия на них внешней силы.

Abstract. The article presents a mathematical model for calculating the deformation of the network structure of facilities as a result of the point impact of external forces on it.

Ключевые слова: геометрический граф, дифференциальные уравнения, математическое моделирование, сетевая техническая система, функция Грина.

Keywords: geometric graph, Green's function, network technical system, differential equations, mathematical modeling.

В последние годы наблюдается значительный рост использования беспилотных летательных аппаратов. Полеты БПЛА фиксируются не только на линии боевого соприкосновения, но и в Белгородской, Брянской, Курской, Воронежской, Московской областях. На данный момент существует много способов борьбы с дронами, но одни из самых простых средств — это средства физической защиты. Защитные сетки способны эффективно противостоять угрозам, исходящим от беспилотников. Это простое решение способное защитить людей и технику в последнее время становится необходимостью.

При установке защитной сетки следует учесть, что ее деформация при прогибе в результате попадания в нее постороннего предмета (дрона), должна быть больше расстояния до поверхности охраняемых объектов. Для расчета возможного прогиба сетки в качестве математической модели можно рассматривать систему струн с закрепленными концами.

В статье рассматривается математическое моделирование задачи о деформации защитной сети от дронов системами дифференциальных уравнений на геометрических графах, проводится исследование построенной однородной краевой задачи, устанавливаются критерии невырожденности неоднородных задач с постоянными и переменными коэффициентами, строятся функции Грина

для представления решений задач в интегральной форме, производится оценка величины деформации сети в результате попадания в нее дрона с учетом силы удара и места попадания.

Рассмотрим сеть Γ , состоящую из произвольного числа ребер $R = \bigcup_{i=1}^n \gamma_i$.

Обозначим новую форму сети в результате ее деформации через функцию $u(x) \in \Gamma$. Множество внутренних вершин графа обозначим через $J(\Gamma)$, а множество граничных вершин $\partial\Gamma$. Множество ребер, примыкающих к общей внутренней вершине обозначим через $R(a), a \in J(\Gamma)$, тогда всю систему из произвольного числа струн обозначим $\Gamma = R \cup J(\Gamma)$ и назовем геометрическим графом в $\mathbb{R}^3$ [1].

Если на $\forall [a_1, a_2] \in \Gamma$ ввести натуральную параметризацию $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t) = a_1 + t(a_2 - a_1) / |a_2 - a_1|, t \in (0, |a_2 - a_1|)$, то $[a_1, a_2]$ оказывается обычным отрезком из $\mathbb{R}$. Тогда форма струны $u(\varphi(t))$ в результате деформации станет обычной функцией на отрезке. Естественно предполагать, что для нее будут существовать производные первого $\frac{d}{dt}u(\varphi(t))$ и высших порядков $u^{(k)}(x) = \frac{d^k}{dt^k}u(\varphi(t))$. А на концах интервала $\gamma = (a_1, a_2)$ будут определены односторонние производные по направлению $u^{(k)}(a_i + 0)$.

Из физического смысла задачи следует, что плотность внешней силы, вызывающей деформацию $f(\cdot): \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$, а эластичности струн непрерывны и $q(x) > 0, \forall x \in \Gamma$. Будем предполагать, что смещение всех точек системы от положения равновесия происходит в направлении вектора действия внешней силы.

В основе построения краевой задачи лежит вариационный принцип минимизации энергии [1,2].

Пусть потенциальная энергия системы определяется функционалом

$$P(u) = \int_{\Gamma} \left(fu - q \frac{u'^2}{2} \right) dx = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} \left(f_i u_i - q_i \frac{u_i'^2}{2} \right) dx, \quad \text{тогда для } u(x) \in C^2(\Gamma),$$

удовлетворяющих условиям жесткого закрепления на границе

$$u(a) = 0, \forall a \in \partial\Gamma, \quad (1)$$

условиям непрерывности

$$\sum_{\gamma \in R(a), a \in J(\Gamma)} u_{\gamma}(a+0) = 0, \quad (2)$$

стационарное значение $u(\cdot)$ функционала $P(u)$ удовлетворяет условиям

$$\sum_{\gamma \in R(a), a \in J(\Gamma)} q_{\gamma} u'_{\gamma}(a+0) = 0 \quad (3)$$

и уравнениям

$$-\left(q_i u_i'\right)' = f_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (4)$$

Для неоднородной задачи (1) – (4) доказано, что соответствующая ей однородная задача имеет только тривиальное решение.

Для частных случаев были получены критерии невырожденности.

Например,

если $\Gamma = (a_1, a_2)$, $q(x) \equiv 1$, то задача

$$u(a_1) = 0, u(a_2) = 0, \quad (5)$$

$$-u'' = f \quad (6)$$

невырождена при $\Delta = (a_1 - a_2) \neq 0$.

Если $\Gamma = (a_1, a_2)$, $q(x) = kx + b$, $\left(x > -\frac{b}{k}, k \neq 0\right)$, то задача

$$u(a_1) = 0, u(a_2) = 0, \quad (7)$$

$$-((kx + b)u')' = f \quad (8)$$

однозначно разрешима при условии $\Delta = \frac{1}{k} \ln \left| \frac{ka_1 + b}{ka_2 + b} \right| \neq 0$.

Если $\Gamma = (a_1, a_2)$, $q(x) = \frac{1}{kx+b}$, $\left(x > -\frac{b}{k}, \quad k \neq 0\right)$, то задача

$$u(a_1) = 0, u(a_2) = 0, \quad (9)$$

$$-\left(\frac{u'}{kx+b}\right)' = f \quad (10)$$

невырождена при $\Delta = (a_1 - a_2) \left(\frac{k}{2}(a_1 + a_2) + b\right) \neq 0$.

Для невырожденной задачи (1) – (4) при любой $f(x) \in C(\Gamma)$ и $u(x) \in C^2(\Gamma)$ решение может быть представлено в виде:

$$u(x) = \int_{\Gamma} G(x, s) f(s) ds, \quad (11)$$

где $G(x, s)$ - функция влияния, а $f(s)$ - плотность силы удара дрона в точку $s \in \Gamma$.

Функция Грина $G(x, s)$ для краевой задачи второго порядка на отрезке можно построить по формуле:

$$G(x, s) = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} H(x, s) & \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ l_1(H(\cdot, s)) & l_1(\varphi_1) & l_1(\varphi_2) \\ l_2(H(\cdot, s)) & l_2(\varphi_1) & l_2(\varphi_2) \end{vmatrix}, \quad (12)$$

где $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^2$ - фундаментальная система решений однородного уравнения,

$$H(x, s) = \begin{cases} 0, & a_1 < x < s; \\ K(x, s), & s < x < a_2, \end{cases} \quad K(x, s) = \frac{\begin{vmatrix} \varphi_1(s) & \varphi_2(s) \\ \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varphi_1(s) & \varphi_2(s) \\ \dot{\varphi}_1(s) & \dot{\varphi}_2(s) \end{vmatrix}} \quad (13)$$

Например, для задачи (5) – (6) функция Грина $G(x, s)$ имеет вид:

$$G(x, s) = \begin{cases} \frac{(a_2 - s)(x - a_1)}{a_1 - a_2}, & a_1 < x < s; \\ \frac{(a_2 - x)(s - a_1)}{a_1 - a_2}, & x < s < a_2. \end{cases} \quad (14)$$

Из свойств определенного интеграла имеет место оценка:

$$|u(x)| = \left| \int_{\Gamma} G(x, s) f(s) ds \right| \leq \int_{\Gamma} |G(x, s) f(s)| ds, \quad (15)$$

Тогда для оценки решения задачи (5) – (6) справедливо неравенство [3]:

$$|u(x)| \leq \int_{a_1}^{a_2} |G(x, s) f(s)| ds \leq \max_{a_1 \leq x \leq a_2} |G(x, s)| \int_{a_1}^{a_2} |f(s)| ds = \max_{a_1 \leq x = s \leq a_2} |G(x, s)| \int_{a_1}^{a_2} |f(s)| ds, \quad (16)$$

Следовательно, расстояние до охраняемого объекта h должно быть больше чем

$$\max_{a_1 \leq x = s \leq a_2} \left| \frac{(a_2 - s)(s - a_1)}{a_1 - a_2} \right| \int_{a_1}^{a_2} f(s) ds. \quad (17)$$

Так, если плотность внешней силы удара $f(x) \equiv 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 10$ то h должно быть больше чем $\frac{a_1 + a_2}{2|a_1 - a_2|} \int_{a_1}^{a_2} f(s) ds = \frac{11}{18} \int_1^{10} ds = \frac{11}{2} \approx 5,5$, а если $f(x) = x$, $a_1 = 1$, $a_2 = 10$, то h должно быть больше чем

$$\frac{a_1 + a_2}{2|a_1 - a_2|} \int_{a_1}^{a_2} f(s) ds = \frac{11}{18} \int_1^{10} s ds = \frac{11}{18} \frac{s^2}{2} \Big|_1^{10} = \frac{11}{18} \cdot \frac{99}{2} = \frac{121}{4} \approx 30,25.$$

Оценка (17) позволяет быстро рассчитать расстояние, на котором должна быть установлена защитная сетка в зависимости от силы удара БПЛА.

Правильный расчет характеристик защитной сетки является важным этапом в процессе ее разработки и установки. Это позволит не только повысить уровень защиты военной техники, но и важных объектов гражданской инфраструктуры от атак беспилотных летательных аппаратов.

Список литературы

1. Белоглазова Т. В. О положительной обратимости разнорядковых задач на графах: дисс. канд. физ.- мат. наук. / Т. В. Белоглазова. – Воронеж., 2003. – 128 с.

2. Евсюкова В.П. Математическое моделирование сетевой технической системы с использованием вариационных принципов // Актуальные вопросы физико-математических и технических наук в сфере современных исследований АПК: Материалы национальной научно-практической конференции (23 октября 2024г.) - Воронеж: ФГБОУ ВО Воронежский ГАУ, 2024. – С. 177-181.

3. Покорный Ю.В. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю.В. Покорный, О.М. Пенкин, В.Л. Прядиев, А.В. Боровских, К.П. Лазарев, С.А. Шабров - Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2004. - 272 с.

References

1. Beloglazova T. V. On positive invertibility of different-order problems on graphs: diss. Cand. of Phys. and Mathematics. Sciences / T. V. Beloglazova. – Voronezh., 2003. – 128 p.

2. Evsyukova V.P. Mathematical modeling of a network technical system using variational principles // Actual issues of physical, mathematical and technical sciences in the field of modern research in the agro-industrial complex: Proceedings of the national scientific and practical conference (October 23, 2024) - Voronezh: Voronezh SAU, 2024. - P. 177-181.

3. Pokorny Yu.V. Differential equations on geometric graphs / Yu.V. Pokorny, O.M. Penkin, V.L. Pryadiev, A.V. Borovskikh, K.P. Lazarev, S.A. Shabrov - Moscow: FIZMATLIT, 2004. - 272 p.