

DOI: 10.58168/OpEq2025_27-32

УДК 519.852

ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА С ОГРАНИЧЕНИЯМИ

A LIMITED TRANSPORT TASK

Веневитина Светлана Семеновна

кандидат физико-математических наук, доцент,
доцент кафедры математики ВГЛУ, г. Воронеж, Россия

Сапронов Иван Васильевич

кандидат физико-математических наук, доцент,
доцент кафедры математики ВГЛУ, г. Воронеж, Россия

Спирина Надежда Михайловна

старший преподаватель кафедры математики ВГЛУ, г. Воронеж, Россия

Venevitina Svetlana Semyonovna

Ph.D. of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate
Professor at the Department of Mathematics, VSUFT, Voronezh, Russia

Sapronov Ivan Vasilievich

Ph.D. of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate
Professor at the Department of Mathematics, VSUFT, Voronezh, Russia

Spirina Nadezhda Mikhailovna

Senior Lecturer at the Department of Mathematics, VSUFT, Voronezh, Russia

Аннотация. Решается задача оптимизации доставки автомобилей к пунктам назначения с дополнительными ограничениями.

Abstract. The problem of optimizing the delivery of vehicles to their destinations with additional restrictions is being solved.

Ключевые слова. Транспортная задача, метод потенциалов, оптимальный план.

Keywords. The transport task, the method of potentials, the optimal plan.

В резерве трех автотранспортных предприятий a_1 , a_2 и a_3 имеется 20, 30 и 50 самосвалов соответственно. Есть два пункта погрузки древесины b_1 и b_2 , которым требуется 35 и 45 автомобилей. Стоимость перегона (доставки) одного самосвала от каждого автотранспортного предприятия в пункты погрузки задана платежной матрицей

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 20 & 30 \\ 10 & 40 \end{pmatrix}.$$

Требуется составить оптимальный по стоимости план доставки автомобилей при дополнительных ограничениях:

1) количество самосвалов от 2-го предприятия во 2-й пункт погрузки должно быть не менее 10,

2) количество самосвалов от 3-го предприятия в 1-й пункт погрузки должно быть не более 30.

Для лучшего восприятия запишем условия нашей задачи в виде таблицы

Таблица 1

$a_i \backslash b_j$	35	45
20	10	20
30	20	30
50	10	40

Дополнительные условия: 1) $x_{22} \geq 10$, 2) $x_{31} \leq 30$

Для выполнения первого ограничения $x_{22} \geq 10$, уменьшим «запасы», т.е. количество автомобилей, имеющих у 2-го автопредприятия, и «запросы» в автомобилях, необходимых 2-му пункту погрузки на 10 единиц. После того, как

мы решим задачу, надо будет сделать обратный шаг и увеличить объем доставки x_{22} на 10 автомобилей.

Для выполнения второго ограничения $x_{31} \leq 30$, вместо первого пункта погрузки (с запросом в 35 машин) введем двух других: один из них с номером 1 будет иметь запрос в 30 машин, а другой с номером 3 – запрос в $5 = 35 - 30$ машин. Стоимости доставки машин в первом столбце останутся прежними. Стоимости доставки машин к 3-му (новому) пункту погрузки древесины будут те же, что и у 1-го пункта, кроме c_{33} , которая принимается равной M (сколь угодно большим числом). Так как $c_{33} = M$ – это самая большая стоимость доставки, то машины перевозить туда будет невыгодно, и в оптимальном решении соответствующая клетка окажется пустой. После того как мы найдем оптимальное решение, 3-й столбец (объемы доставок) надо будет добавить к 1-му.

Таким образом, с учетом ограничений получим новую таблицу 2:

Таблица 2

b_j	30	35	5
a_i			
20	10	20	10
20	20	30	20
50	10	40	M

Прежде чем решать полученную транспортную задачу обычным методом потенциалов, проверим выполнение условия баланса $\sum_i a_i = \sum_j b_j$.

$$\sum_i a_i = 20 + 20 + 50 = 90, \quad \sum_j b_j = 30 + 35 + 5 = 70.$$

Получили задачу с неправильным балансом. Для исправления баланса вводим 4-й фиктивный пункт погрузки с запросом в $90 - 70 = 20$ машин и с

нулевыми стоимостями доставки. Составим начальный опорный план методом наименьшего элемента.

Таблица 3

$a_i \backslash b_j$	30	35	5	20	
20	¹⁰ 20	²⁰ —	¹⁰ —	⁰ —	$u_1 = 0$
20	²⁰ —	³⁰ 15	²⁰ 5	⁰ —	$u_2 = -10$
50	¹⁰ 10	⁴⁰ 20	^M —	⁰ 20	$u_3 = 0$
	$v_1 = 10$	$v_2 = 40$	$v_3 = 30$	$v_4 = 0$	

Вычислим стоимость доставки автомобилей при этом опорном плане:

$$F(X_1) = 20 \cdot 10 + 15 \cdot 30 + 5 \cdot 20 + 10 \cdot 10 + 20 \cdot 40 + 20 \cdot 0 = 1650 \text{ (ден. ед.)}$$

Проверим план на оптимальность методом потенциалов. Для «заполненных клеток» составляем уравнения $u_i + v_j = c_{ij}$:

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_1 + v_1 = 10 & u_1 = 0, \\ u_2 + v_2 = 30 & u_2 = -10, \\ u_2 + v_3 = 20 & \\ u_3 + v_1 = 10 & u_3 = 0, \\ u_3 + v_2 = 40 & v_1 = 10, \\ u_3 + v_4 = 0 & v_2 = 40, \\ & v_3 = 30, \\ & v_4 = 0. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (u_1 \text{ выбрали сами, остальные переменные} \\ \text{находим «по цепочке»}) \end{array}$$

Для «пустых» клеток проверяем неравенства $u_i + v_j \leq c_{ij}$:

$$u_1 + v_2 \leq 20 \quad 0 + 40 \leq 20 \quad \text{не верно}$$

$$u_1 + v_3 \leq 10 \quad 0 + 30 \leq 10 \quad \text{не верно}$$

$$u_1 + v_4 \leq 0 \quad 0 + 0 \leq 0$$

$$u_2 + v_1 \leq 20 \quad -10 + 10 \leq 20$$

$$u_2 + v_4 \leq 0 \quad -10 + 0 \leq 0$$

$$u_3 + v_3 \leq M \quad 0 + 30 \leq M$$

Полученное решение не является оптимальным, так как неравенства не выполнены в двух клетках (1;2) и (1;3).

Чтобы перейти к лучшему решению составим замкнутый цикл, который начинается в клетке (1;2) и меняет направление в клетках (1;1), (3;1), (3;2). В углах цикла расставляем знаки чередуя и начиная с + в клетке (1;2). Из клеток со знаком «-» выбираем наименьшую перевозку $\theta = \min_{\leftarrow} \{20; 20\} = 20$. Сдвигаем это число по циклу в соответствии со знаком. Получаем второе опорное решение X_2

Таблица 4

$b_j \backslash a_i$	30	35	5	20	
20	10 —	20 20	10 —	0 —	$u_1 = 0$
20	20 —	30 15	20 5	0 —	$u_2 = 10$
50	10 30	40 0	M —	0 20	$u_3 = 20$
	$v_1 = -10$	$v_2 = 20$	$v_3 = 10$	$v_4 = -20$	

Так как при пересчете таблицы у нас обнулились перевозки в двух клетках вместо одной, то одну из них (например, клетку (3;2)) будем считать заполненной с перевозкой $x_{32} = 0$.

Снова проверяем план на оптимальность методом потенциалов. Для «заполненных клеток» составляем уравнения $u_i + v_j = c_{ij}$ и найденные u_i и v_j записываем в Таблицу 4. Для «пустых» клеток проверяем неравенства $u_i + v_j \leq c_{ij}$

и видим, что они все выполнены. Следовательно, полученное решение является оптимальным.

Запишем оптимальное решение исходной задачи. Для этого увеличим объем доставки x_{22} от второго автотранспортного предприятия ко второму пункту погрузки древесины на 10 автомобилей и объединим объемы доставок 3-го и 1-го пунктов погрузки.

$$\text{Получим: } X_{opt} = X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 20 \\ 5 & 25 \\ 30 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычислим стоимость доставки самосвалов от автопредприятий к пунктам погрузки древесины:

$$F_{opt} = F(X_2) = 20 \cdot 20 + 5 \cdot 20 + 25 \cdot 30 + 30 \cdot 10 = 1550.$$

Список литературы

1. Общий курс высшей математики для экономистов: учебник / под ред. В.И. Ермакова. – Москва : ИНФРА-М, 2003. – 656 с. – (Серия «Высшее образование»).
2. Сапронов, И. В. Прикладная математика : лабораторный практикум. В 2 ч. Ч. 2 / И. В. Сапронов, С. С. Веневитина, Е. О. Уточкина ; М-во образования и науки РФ, ФГБОУ ВО «ВГЛУ». – Воронеж, 2015. – 80 с.

References

1. General course of higher mathematics for economists: textbook / edited by V.I. Ermakov. – M.: INFRA-M, 2003. — 656 p. — (Series "Higher Education").
2. Sapronov, I.V. Applied Mathematics : laboratory workshop. At 2 parts. Part 2 / I. V. Sapronov, S. S. Venevitina, E. O. Utochkina ; Ministry of Education and Science of the Russian Federation, VSUFT. – Voronezh, 2015. – 80 p.