

DOI: 10.58168/OpEq2025_39-43

УДК 517.95

**ОБ ОДНОЙ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ В
ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С КОМПЛЕКСНЫМИ
ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ**
ON ONE OVERDETERMINED SYSTEM OF PARTIAL DERIVATIVE
EQUATIONS WITH COMPLEX PERIODIC COEFFICIENTS

Джумаев Бустонбек Махмадназарович

кандидат физико-математических наук, зав. кафедрой
математического анализа Худжандского государственного

университета им. академика Б. Гафурова,

г. Худжанд, Республика Таджикистан

Jumaev Bustonbek Makhmadnazarovich

candidate of physical and mathematical sciences, head of the department of
mathematical analysis of the Khujand State University named

after academician B. Gafurov

Khujand, Republic of Tajikistan,

Аннотация. В статье рассматриваются переопределенные системы уравнений в частных производных – обобщенные системы Коши-Римана со многими переменными с комплексными периодическими коэффициентами. Найдена формула общего решения однородной системы. В двумерном случае получены формулы общего решения, а также ограниченных и периодических решений неоднородной системы.

Abstract. The article considers overdetermined systems of partial differential equations – generalized Cauchy-Riemann systems with many variables with complex periodic coefficients. A formula for the general solution of a homogeneous system is

found. In the two-dimensional case, formulas for the general solution, as well as for bounded and periodic solutions of a non-homogeneous system, are obtained.

Ключевые слова: переопределенная система, уравнение в частных производных, общее решение, ограниченные решения, периодические решения.

Keywords: overdetermined systems, partial differential equations, general solution, bounded solution, periodic solution.

В работе рассматривается переопределённая система комплексных уравнений в частных производных с n независимыми переменными вида

$$w_{\bar{z}_j} + a_j w = f_j(z), \quad j = \overline{1, n}, \quad (1)$$

где a_j и f_j — заданные функции переменной z , определённые во всем C^n — n -мерное комплексное евклидово пространство.

Исследуем систему (1) в предположении, что a_j и f_j принадлежат $C_{2\pi}$ — пространство непрерывных в C^n функций $f(z_1, \dots, z_n)$, удовлетворяющих условиям двоякопериодичности [4]:

$$f(z_1, \dots, z_j + h_j, \dots, z_n) = f(z_1, \dots, z_n), \quad (2)$$

здесь $h_j \in \{2\pi, 2\pi i\}$.

Необходимым и достаточным условием полной разрешимости системы (1) будут равенства [2]:

$$\partial_{\bar{z}_k} a_j = \partial_{\bar{z}_j} a_k, \quad (3)$$

$$\partial_{\bar{z}_j} f_k - \partial_{\bar{z}_k} a_j + a_k f_j - a_j f_k = 0, \quad j \neq k. \quad (4)$$

Введем следующие операторы в $C_{2\pi}$ [5]:

$$T_j f = f_0^j \bar{z}_j - 2i \sum_{k \neq 0} k^{-1} f_k^j e^{i(k, z_j)}, \quad (5)$$

где $k = k_1 + ik_2 \in Z^2$ — целочисленная решетка в C^1 , $(k, z_j) = k_1 x_j + k_2 y_j$, f_k^j — коэффициенты Фурье функции f по переменной z_j . А также верны следующие равенства:

$$(T_j f)_{\bar{z}_j} = f, \quad T_j(f_{\bar{z}_j}) = f - f_0^j. \quad (6)$$

Введем также операторы: $S_j f = T_j f - f_0^j \bar{z}_j$, $j = 1, 2$. Очевидно, что $S_j f \in C_{2\pi}$.

Для функций $a_k \in C_{2\pi}$ определим следующие средние значения:

$$a_{k,j} = \gamma_j \int_{K^j} a_k(z) d\omega_j, \quad 1 \leq j \leq n, \quad (7)$$

где $\gamma_j = (2\pi)^{-2j}$, $d\omega_j = dz_1 \cdots dz_j$. Положим, что $a_{k,0} = a_k(z)$. Среднее значение функции a_k по переменной z_j обозначим через $[a_k]_j$. Тогда получим

$$[a_k]_1 = a_{k,1}. \quad (8)$$

Справедлива следующая

Теорема 1. Пусть коэффициенты однородной системы соответствующей (1) принадлежат $C_{2\pi}$ и выполнены условия (3). Тогда общее решение этой системы имеет вид

$$w(z) = e^{-\Omega(z)} \varphi(z), \quad (9)$$

где

$$\Omega(z) = \sum_{j=1}^n T_j a_{j,j-1}, \quad (10)$$

$\varphi(z)$ — произвольная аналитическая по z функция.

В системе (1) предположим, что $n = 2$. Систему запишем в виде

$$\begin{cases} w_{\bar{z}_1} + a(z_1, z_2)w = f(z_1, z_2), \\ w_{\bar{z}_2} + b(z_1, z_2)w = g(z_1, z_2). \end{cases} \quad (11)$$

Необходимые и достаточные условия полной разрешимости (3), (4) для данной системе выглядят так:

$$a_{\bar{z}_2} = b_{\bar{z}_1}, \quad (12)$$

$$-ag + bf + f_{\bar{z}_2} - g_{\bar{z}_1} = 0. \quad (13)$$

Верна следующая теорема

Теорема 2. Пусть коэффициенты однородной системы (11) принадлежат $C_{2\pi}$ и удовлетворяют условию (12). Тогда общее решение этой системы имеет вид

$$w(z_1, z_2) = e^{2im(\overline{a_0}z_1 + \overline{b_0}z_2)} \omega_1(z_1, z_2) \omega_2(z_2) \Phi(z_1, z_2), \quad (14)$$

где a_0, b_0 – средние значения функций a, b соответственно, $\omega_1 = e^{-S_1 a}$, $\omega_2 = e^{-S_2 b_0^1}$, Φ – произвольная аналитическая по z_1, z_2 функция.

Пусть $w(z_1, z_2)$ ограниченное во всем C^2 . Тогда решение однородной системы соответствующей (11), будет ограниченной в C^2 и в силу теоремы Лиувилля $\Phi(z_1, z_2) \equiv c$, где c – постоянная. Поэтому все ограниченные в C^2 решения однородной системы имеет вид

$$w(z_1, z_2) = e^{2im(\overline{a_0}z_1 + \overline{b_0}z_2)} \omega_1(z_1, z_2) \omega_2(z_2) c, \quad (15)$$

причем все эти решения являются почти-периодическими.

Список литературы

1. Хёрмандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. – М.: Мир, 1986. Т. 2. – 455 с.
2. Михайлов Л. Г. Некоторые переопределенные системы уравнений в частных производных с двумя неизвестными функциями. – Душанбе: Дониш, 2017. – 134 с.
3. N. Taghizadeh, A. Neirameh. Generalization of some overdetermined systems of complex partial differential equations. – Journal of King Saud University – Science, 2011. №23, p. 175–177.
4. Ахиезер И.И. Элементы теории эллиптических функций. – М.: Наука, 1970. – 304 с.
5. Байзаев С. О периодических решениях нелинейной обобщенной системы Коши-Римана. – Доклады АН ТаджССР, 1979. Т.22, №1. С. 3 – 6.
6. Байзаев С. Эллиптические системы с ограниченными коэффициентами на плоскости. Новосибирск, НГУ, 1999. – 74 с.

7. Векун И.Н. Обобщенные аналитические функции. – М.: Наука, 1988. – 509 с.

8. Джумаев Б.М. Об общем решении переопределенной системы уравнений в частных производных с комплексными периодическими коэффициентами / С. Байзаев, Б.М. Джумаев // Известия Академии наук Республики Таджикистан. Отделение физ.-мат., хим., геол. и тех. наук. 2022. №3 (188). – С. 42 – 52.

References

1. Hörmander L. Analysis of linear partial differential operators. – Moscow: Mir, 1986. Vol. 2. – 455 p.

2. Mikhailov L. G. Some overdetermined systems of partial differential equations with two unknown functions. – Dushanbe: Donish, 2017. – 134 p.

3. N. Taghizadeh, A. Neirameh. Generalization of some overdetermined systems of complex partial differential equations. – Journal of King Saud University – Science, 2011. №23, p. 175–177.

4. Akhiezer I.I. Elements of the theory of elliptic functions. – М.: Nauka, 1970. – 304

5. Bayzaev S. On periodic solutions of the nonlinear generalized Cauchy-Riemann system. – Reports of the Academy of Sciences of the Tajik SSR, 1979. Vol. 22, No. 1. P. 3 – 6.

6. Bayzaev S. Elliptic systems with bounded coefficients on the plane. Novosibirsk, NSU, 1999. – 74 p.

7. Vekua I.N. Generalized analytical functions. – М.: Nauka, 1988. – 509 p.

8. Jumaev B.M. On the general solution of an overdetermined system of partial differential equations with complex periodic coefficients / S. Bayzaev, B.M. Djumaev // Bulletin of the Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan. Department of Phys.-Math., Chem., Geol. and Engineering Sciences. 2022. No. 3 (188). - P. 43 - 53.