

DOI: 10.58168/OpEq2025\_44-49

УДК 517.986

**ОБ ОДНОЙ «МАЛОЙ» АЛГЕБРЕ ОПЕРАТОРОВ, ДЕЙСТВУЮЩИХ В  
ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ**

ABOUT ONE "SMALL" ALGEBRA OF OPERATORS ACTING  
IN THE WEIGHT SPACES

**Кабанко Михаил Владимирович**

кандидат физико-математических наук, доцент

доцент кафедры математического анализа и прикладной математики

Курский ГУ, г. Курск, Россия

**Мягченкова Елена Леонидовна**

старший преподаватель кафедры математического анализа и прикладной

математики, Курский ГУ, г. Курск, Россия

**Kabanko Mikhail Vladimirovich**

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor

Associate Professor of the Department of Mathematical Analysis and Applied

Mathematics, Kursk State University, Kursk, Russia

**Myagchenkova Elena Leonidovna**

Senior Lecturer of the Department of Mathematical Analysis and Applied

Mathematics, Kursk State University, Kursk, Russia

**Аннотация.** В данной работе описывается частный случай семейства гильбертовых пространств. Операторы, отображающие эти пространства в себя, имеют простое представление в виде суммы скалярного оператора и оператора, принадлежащего некоторому операторному идеалу. Ранее В.И. Овчинниковым была высказана гипотеза о связи строения операторов, действующих в интерполяционных семействах с «количеством» интерполяционных пространств. Пример, указанный в работе, подтверждает эту гипотезу.

**Abstract.** The paper describes a special case of a family of Hilbert spaces. The operators that map these spaces into themselves have a simple representation in the form of the sum of a scalar operator and the operator which belong to some operator ideal. Earlier, V.I. Ovchinnikov hypothesized that the structure of operators operating in interpolation families is related to the "number" of interpolation spaces. The example given in the paper confirms this hypothesis.

**Ключевые слова:** гильбертово семейство, весовое пространство.

**Key words:** Hilbert n-tuple, weight space.

Рассмотрим гильбертову пару  $\bar{K} = \{l_2(\omega^{-1}), l_2(\omega)\}$  (см. [1]), где веса определены следующим образом  $\omega_j = 2^{-2^j}$ . Можно легко показать, что сумма пространств  $l_2(2^{2^j}) + l_2(2^{-2^j})$  совпадает с пространством  $l_2(2^{-2^j})$ , а пересечение пространств  $l_2(2^{2^j}) \cap l_2(2^{-2^j})$  с пространством  $l_2(2^{2^j})$  с равенством норм. Рассмотрим оператор умножения (мультипликатор) действующий по правилу:

$$M_\omega : l_2 \rightarrow l_2, \quad \xi_j \mapsto \omega_j \xi_j$$

Этот оператор отображает изометрично пространство  $l_2$  (см. [2])

Если предположить, что оператор  $A$  принадлежит алгебре ограниченных операторов  $B(l_2(\omega))$ , действующих в весовом пространстве, то можно сделать вывод, что оператор вида  $M_\omega A M_\omega^{-1}$  принадлежит алгебре  $B(l_2)$ . Это, в свою очередь, эквивалентно тому, что матрицу этого оператора можно представить в виде  $(2^{-2^j + 2^i} a_{ij})_{i,j=1}^\infty$ . Таким образом, действие оператора  $A$  в весовом пространстве  $l_2(\omega)$  накладывает на элементы ее матрицы следующие ограничения

$$|a_{ij}| \leq 2^{-2^i + 2^j} \cdot \|A\|_{l_2 \rightarrow l_2}.$$

Рассуждая аналогично, действие оператора  $A$  в весовом пространстве  $l_2(\omega^{-1})$  будет давать следующую оценку на элементы матрицы:

$$|a_{ij}| \leq 2^{2^i - 2^j} \cdot \|A\|_{l_2 \rightarrow l_2}.$$

Таким образом, если оператор  $A$  действует в паре  $\bar{K} = \{l_2(\omega^{-1}), l_2(\omega)\}$ , то элементы матричного представления этого оператора будут подчиняться следующим условиям (см. [3]):

$$|a_{ij}| \leq 2^{-|2^j - 2^i|} \cdot \|A\|_{l_2 \rightarrow l_2}$$

Рассмотрим весовые пространства  $l_2(u)$  и  $l_2(v)$ , в которых веса определены по правилам

$$u_{2n-1} = 2^{2^{2n-1}}, u_{2n} = 2^{2^{2n}}, u_{2n+1} = 2^{-2^{2n+1}}, u_{2n+2} = 2^{-2^{2n+2}}$$

и

$$v_{2n-1} = 2^{-2^{2n-1}}, v_{2n} = 2^{-2^{2n}}, v_{2n+1} = 2^{2^{2n+1}}, v_{2n+2} = 2^{2^{2n+2}}$$

Эти пространства также образуют гильбертову пару и в ней можно задать действие ограниченного оператора  $A$ . Рассуждая аналогично тому, как это сделано для пары  $\bar{K}$ , легко найти условия, которые будут верны для элементов матрицы этого оператора.

Пусть оператор  $A$  действует ограниченно в пространствах  $l_2(u), l_2(v)$ ,  $l_2(\omega^{-1}), l_2(\omega)$ . Тогда элементы матрицы этого линейного ограниченного оператора будут ограничены сверху величиной

$$|a_{ij}| \leq 2^{-2^j - 2^i} \cdot \|A\|_{l_2 \rightarrow l_2}$$

Выясним действие операторов  $A_u$  и  $A_l$  в пространствах  $l_2(\omega^{-1}), l_2(\omega)$ . Оператор  $A_u$  представим в виде

$$A_u = \sum_{k=1}^{\infty} A_k$$

где  $A_k$  операторы имеют матрицы вида  $(a_{ii+k})_{i=1}^{\infty}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Непосредственными вычислениями можно показать, что каждый оператор  $A_k$  отображает  $l_2(\omega)$  в  $l_2(\omega^{-1})$ , т.е. пространство суммы в пространство пересечения.

Оценим нормы операторов  $A_k$  как отображение пространства  $l_2$  в пространство  $l_2(\omega^{-1})$ :

$$\|A_k\|_{l_2 \rightarrow l_2(\omega^{-1})}^2 = \sup_{\|x\|_{l_2}=1} \|A_k x\|_{l_2(\omega^{-1})}^2 \leq 2^{-2^k} \cdot \|A\|_{l_2 \rightarrow l_2}$$

Следовательно, поскольку нормы операторов  $A_k$  имеют указанные выше степенные оценки, оператор  $A_u$  образуют, по теореме Вейерштрасса, абсолютно сходящийся ряд и является оператором, который ограниченно действует из  $l_2$  в  $l_2(\omega^{-1})$ .

Нижнетреугольную часть оператора  $A$  также можно представить в виде ряда

$$A_l = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_k$$

где  $\tilde{A}_k$  – операторы, имеющие матричное представление  $(a_{i+ki})_{i=1}^{\infty}$ , с условиями на элементы матрицы

$$|a_{i+ki}| \leq 2^{-2^i - 2^{i+k}} \cdot \|A\|_{l_2 \rightarrow l_2}.$$

Аналогично предыдущим рассуждениям, можно показать, что оператор  $A_l$  действует из пространства  $l_2(\omega)$  в пространство  $l_2$ .

Определим действие оператора  $A$  во всех пространствах  $l_2(u), l_2(v)$ ,  $l_2(\omega^{-1}), l_2(\omega)$ . Введем в рассмотрение подпространство вида

$$N = \left\{ \{\xi_j\}_{j=1}^{\infty} \in l_2(2^{2^j}) \mid \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j = 0 \right\}$$

Очевидно, что оно является ядром неограниченного в пространстве  $l_2$  функционала. Положим, что оператор  $A$  действует из подпространство  $N$  в себя. Тогда образом вектора  $x = \{\xi_j\}_{j=1}^{\infty}$  будет вектор

$$y = \{\zeta_i\}_{i=1}^{\infty} = \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} a_{1j} \xi_j, \sum_{j=1}^{\infty} a_{2j} \xi_j, \dots, \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj} \xi_j, \dots \right\}$$

и будет верно

$$\sum_{i=1}^{\infty} \zeta_i = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \xi_j = 0.$$

Так как  $y \in l_2(2^{2^j})$  то последний ряд абсолютно сходится и изменив порядок суммирования в последнем выражении, получим

$$\sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \left( \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} \right) = 0$$

Последовательность  $\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} \right\}_{j=1}^{\infty}$  является функционалом для  $x = \{\xi_j\}_{j=1}^{\infty}$  в пространстве  $l_2(2^{2^j})$  и следовательно принадлежит двойственному пространству  $l_2(2^{-2^j})$ . Тогда

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} = \lambda$$

Таким образом, элементы матрицы  $A$ , стоящие на главной диагонали можно представить в виде

$$a_{jj} = \lambda - \sum_{i \neq j}^{\infty} a_{ij}.$$

Из этих рассуждений легко следует, что оператор  $A$  имеет представление  $A = \lambda I + T$ , где  $T$  – оператор, имеющий матрицу  $(t_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$ :

$$t_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, i \neq j \\ -\sum_{i \neq j}^{\infty} a_{ij}, i = j \end{cases}$$

Непосредственными вычислениями можно показать, что внескалярная часть этого оператора отображает сумму пространств в пересечение.

### Список литературы

1. Овчинников, В.И. Интерполяция в симметрично-нормированных идеалах операторов, действующих в различных пространствах/В.И. Овчинников// Функц. анализ и его прил. 1994. № 28(3) С.80-82  
<http://mi.mathnet.ru/rus/faa/v28/i3/p80>

2. Ovchinnikov, V.I. Operator ideals and interpolation in Hilbert couples/ V.I.Ovchinnikov// Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. 2014. № 2 С.142-161 <http://www.vestnik.vsu.ru/pdf/physmath/2014/02/2014-02-13.pdf>

3. Кабанко, М.В. Алгебра операторов, действующих в гильбертовой паре/ М.В. Кабанко// Труды математического факультета ВГУ, 2001. № 6. С.54-61 [https://www.researchgate.net/publication/390597158\\_Algebra\\_of\\_operators\\_acting\\_in\\_Hilbert\\_couple?channel=doi&linkId=67f57d2803b8d7280e2f642c&showFulltext=true](https://www.researchgate.net/publication/390597158_Algebra_of_operators_acting_in_Hilbert_couple?channel=doi&linkId=67f57d2803b8d7280e2f642c&showFulltext=true)

### References

1. Ovchinnikov, V. I. Interpolation of Cross-Normed Ideals of Operators Defined on Different Spaces/ V. I. Ovchinnikov// Funct. Anal. Appl., **28:3** (1994), 213–215 <http://mi.mathnet.ru/rus/faa/v28/i3/p80>

2. Ovchinnikov, V.I. Operator ideals and interpolation in Hilbert couples/ V.I.Ovchinnikov// Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. 2014. № 2 С.142-161 <http://www.vestnik.vsu.ru/pdf/physmath/2014/02/2014-02-13.pdf>

3. Kabanko, M.V. The Algebra of Operators Acting in the Hilbert Couple/ M.V. Kabanko // Transactions of the Mathematical Faculty VSU, 2001. Issue 6. P.54-61 [https://www.researchgate.net/publication/390597158\\_Algebra\\_of\\_operators\\_acting\\_in\\_Hilbert\\_couple?channel=doi&linkId=67f57d2803b8d7280e2f642c&showFulltext=true](https://www.researchgate.net/publication/390597158_Algebra_of_operators_acting_in_Hilbert_couple?channel=doi&linkId=67f57d2803b8d7280e2f642c&showFulltext=true)