

DOI: 10.58168/OpEq2025_64-70

УДК 517.95

ОБ ОПЕРАТОРАХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ТИПА ВЕКУА-ЭРДЕЙИ-ЛАУНДЕСА

ON VEKUA-ERDELYI-LOWNDES TYPE TRANSMUTATION

Каятский Артем Викторович

студент 3 курса факультета прикладной математики, информатики и механики, ВГУ, г. Воронеж, Россия

Шишкина Элина Леонидовна

доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры математического и прикладного анализа, ВГУ, г. Воронеж, Россия

Kayatskiy Artem Viktorovich

3rd year student of the Faculty of Applied Mathematics, Informatics and Mechanics, Voronezh State University, Voronezh, Russia

Shishkina Elina Leonidovna

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, docent, Professor of the Department of Mathematical and Applied Analysis, Voronezh State University, Voronezh, Russia

Аннотация. В статье построены операторы преобразования типа Векуа-Эрдейи-Лаундеса, действующие по первой производной. Такие операторы применимы для решения широкого круга задач для уравнений типа теплопроводности.

Abstract. The article develops transformation operators of the Vekua-Erdelyi-Lowndes type that operate on the first derivative. These operators are useful for addressing a broad spectrum of problems related to heat conduction equations.

Ключевые слова: оператор преобразования, сплетающее свойство, интегральный оператор, ядро, операторы Векуа-Эрдейи-Лаундеса, оператор Вольтерра, сплетающий оператор.

Keywords: transformation operator, entanglement property, integral operator, kernel, Vekua-Erdelyi-Lowndes operators, Volterra operator, intertwining operator.

Введение

Дадим определение оператора преобразования, следуя [1]. Пусть у нас есть два оператора (A, B) . Ненулевой оператор T называется *оператором преобразования*, если выполняется следующее соотношение

$$TA = BT. \quad (1)$$

Соотношение (1) называется *сплетающим свойством*, а оператор T также называют *сплетающим оператором*.

Оператор T обычно является интегральным оператором с некоторым ядром, вид которого иногда можно найти явно.

Первостепенное значение для метода операторов преобразования имеет выбор соответствующих пространств функций, где справедливо равенство (1).

В нашей статье получен специальный класс операторов преобразования, которые сплетают операторы $A + \lambda_1$ и $A + \lambda_2$, где $A: L_1 \rightarrow L_2$ – некоторый оператор, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$. Такие операторы преобразования появляются в работах А. Эрдейи, И. Н. Векуа и Дж. С. Лаундеса (см. ссылки в [2]). Поэтому их естественно называть операторами *Векуа-Эрдейи-Лаундеса* (ВЭЛ).

Используя оператор преобразования ВЭЛ, получим утверждение о связи между решениями задач Коши для уравнений $w_t = Aw$ и $w_t \pm c^2 w = Aw$, где $w = w(x, t)$, $t, c \in \mathbb{R}$, A – линейный оператор, действующий по $x \in \mathbb{R}^n$. К этому типу относятся, например, уравнение теплопроводности, одномерное уравнение Шрёдингера. Такие уравнение часто встречается в теории тепло- и

массопереноса. Они описывают нестационарные тепловые процессы в покоей среде или твердом теле с постоянной температуропроводностью.

**Построение операторов преобразования Векуа-Эрдейи-Лаундеса
для первой производной в форме операторов Вольтерра второго рода**

В этом разделе мы строим операторы преобразования $L_c^\pm$ со сплетающим свойством $L_c^\pm Df = (D \pm c^2)L_c^\pm f$. Процесс построения включает интегрирование по частям и дифференцирование интеграла по параметру, а также решение линейного однородного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка.

Теорема 1. Пусть $f \in C^1$. Операторы преобразования $L_c^\pm$, удовлетворяющие тождеству

$$L_c^\pm Df = (D \pm c^2)L_c^\pm f, \quad (2.1)$$

где $D = \frac{d}{dt}$, имеют вид операторов Вольтерра

$$(L_c^\pm f)(t) = \int_{-t}^t K^\pm(t, \tau) f(\tau) d\tau, \quad (2.2)$$

ядра которых имеют вид

$$K^\pm(t, \tau) = e^{\mp c^2 \tau} \cdot \Phi(\pm(t - \tau)), \quad (2.3)$$

где $\Phi(s)$ – произвольная непрерывно дифференцируемая функция.

При дополнительных условиях

$$\frac{dK^+(t, -t)}{dt} = -\frac{c^2}{2}, \quad K^+(t, t) = 0,$$

ядро K^+ имеет вид $K^+(t, \tau) = -\frac{c^2}{4}(t - \tau) e^{-\frac{c^2}{2}(t+\tau)}$.

При дополнительных условиях

$$\frac{dK^-(t, -t)}{dt} = \frac{c^2}{2}, \quad K^-(t, t) = 0,$$

ядро K^- имеет вид $K^-(t, \tau) = -\frac{c^2}{4}(\tau - t) e^{\frac{c^2}{2}(t+\tau)}$.

Доказательство.

Мы ищем оператор преобразования, удовлетворяющий тождеству (2.1) в форме оператора Вольтерра (2.2). Здесь ядро $K^\pm(t, \tau)$ гладкое по обоим переменным.

Рассмотрим случай $L_c^+ Df = (D + c^2)L_c^+ f$. Подстановка в (2.1) приводит к соотношению

$$\int_{-t}^t K^+(t, \tau) f'(\tau) d\tau = \frac{d}{dt} \int_{-t}^t K^+(t, \tau) f(\tau) d\tau + c^2 \int_{-t}^t K^+(t, \tau) f(\tau) d\tau.$$

Поскольку

$$\int_{-t}^t K^+(t, \tau) f'(\tau) d\tau = K^+(t, t)f(t) - K^+(t, -t)f(-t) - \int_{-t}^t K_\tau^+(t, \tau) f(\tau) d\tau$$

и

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{-t}^t K^+(t, \tau) f(\tau) d\tau = \\ &= \int_{-t}^t K_t^+(t, \tau) f(\tau) d\tau + K^+(t, t)f(t) - K^+(t, -t)f(-t), \end{aligned}$$

то мы получаем

$$-K_\tau^+(t, \tau) = K_t^+(t, \tau) + c^2 K^+(t, \tau). \quad (2.4)$$

Пусть $K^+(t, \tau) \in C^1(\Omega), \bar{\Omega} \cap \{(t, \tau) \mid t = \tau\} \neq \emptyset$. Уравнение (2.4) является линейным однородным дифференциальным уравнением в частных производных первого порядка. Запишем его в виде

$$K_\tau^+(t, \tau) + K_t^+(t, \tau) = -c^2 K^+(t, \tau). \quad (2.5)$$

Используя метод характеристик Лагранжа для решения уравнения в частных производных первого порядка для уравнения (2.5) составим систему уравнений

$$\frac{d\tau}{1} = \frac{dt}{1} = -\frac{dK^+(t, \tau)}{c^2 K^+(t, \tau)} = ds.$$

Найдем первое характеристическое уравнение:

$$\frac{d\tau}{1} = \frac{dt}{1} \Rightarrow \tau - t = C_1.$$

Найдем второе характеристическое уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{d\tau}{1} &= -\frac{dK^+(t, \tau)}{c^2 K^+(t, \tau)} \Rightarrow \tau = -\frac{1}{c^2} \ln(c^2 K^+(t, \tau)) \Rightarrow \\ -c^2 \tau &= \ln(c^2 K^+(t, \tau)) \Rightarrow c^2 \ln e^\tau + \ln(c^2 K^+(t, \tau)) = 0 \Rightarrow \\ \ln e^{c^2 \tau} + \ln(c^2 K^+(t, \tau)) &= 0 \Rightarrow \ln(c^2 e^{c^2 \tau} K^+(t, \tau)) = 0 \Rightarrow \\ K^+(t, \tau) \cdot e^{c^2 \tau} &= C_2. \end{aligned}$$

Тогда общее решение уравнения (2.5) имеет вид

$$K^+(t, \tau) \cdot e^{c^2 \tau} = \Phi(t - \tau)$$

где $\Phi(t - \tau)$ – произвольная непрерывно дифференцируемая функция. Таким образом

$$K^+(t, \tau) = e^{-c^2 \tau} \cdot \Phi(t - \tau). \quad (2.6)$$

Чтобы найти функцию $\Phi(t - \tau)$, введем дополнительные условия:

$$\frac{dK^+(t, -t)}{dt} = -\frac{c^2}{2}, \quad (2.7)$$

$$K^+(t, t) = 0. \quad (2.8)$$

Теперь найдем такую функцию $\Phi(t - \tau)$, чтобы условия (2.7) и (2.8) выполнялись. Введение новых переменных

$$u = \frac{t + \tau}{2}, \quad v = \frac{t - \tau}{2} \Rightarrow t = u + v, \quad \tau = u - v \quad (2.9)$$

и использование обозначений $H^+(u, v) = K^+(u + v, u - v) = K^+(t, \tau)$ дает задачу

$$\begin{aligned} H_v^+(u, v) &= -c^2 H^+(u, v) \\ H^+(0, v) &= -\frac{c^2}{2} v \end{aligned} \quad (2.10)$$

Теперь запишем равенство (2.10) с учетом замены (2.9)

$$H^+(u, v) = e^{-c^2(u-v)} \cdot \Phi(2v). \quad (2.11)$$

Из условия (2.10) получаем

$$H^+(0, v) = e^{c^2 v} \cdot \Phi(2v) = -\frac{c^2}{2} v.$$

Тогда

$$\Phi(2v) = e^{-c^2 v} \cdot \left(-\frac{c^2}{2} v\right). \quad (2.12)$$

Подставим (2.12) в (2.11), получим

$$H^+(u, v) = -\frac{c^2}{2} v e^{-c^2 v}.$$

Возвращаясь к $K^+(t, \tau)$, получаем

$$K^+(t, \tau) = -\frac{c^2}{4} (t - \tau) e^{-\frac{c^2}{2}(t+\tau)}. \quad (2.13)$$

Легко видеть, что $K^+(t, t) = 0$, а $K^+(t, -t) = -\frac{c^2}{2} t \Rightarrow \frac{dK^+(t, -t)}{dt} = -\frac{c^2}{2}$.

Следовательно, условия (2.7)-(2.8) справедливы

Проверим выполнение (2.5):

$$K_\tau^+(t, \tau) = \frac{c^2}{8} e^{-\frac{c^2}{2}(t+\tau)} (c^2(t - \tau) + 2),$$

$$K_t^+(t, \tau) = \frac{c^2}{8} e^{-\frac{c^2}{2}(t+\tau)} (c^2(t - \tau) - 2),$$

тогда

$$\begin{aligned} K_\tau^+(t, \tau) + K_t^+(t, \tau) &= \frac{c^2}{8} e^{-\frac{c^2}{2}(t+\tau)} (c^2(t - \tau) + 2 + c^2(t - \tau) - 2) = \\ &= \frac{c^4}{4} (t - \tau) e^{-\frac{c^2}{2}(t+\tau)} = -c^2 K^+(t, \tau). \end{aligned}$$

Получаем, что (2.13) является ядром оператора (2.2).

Аналогично находим $K^-(t, \tau) = e^{c^2 \tau} \cdot \Phi(\tau - t)$, $K^-(t, \tau) = -\frac{c^2}{4} (\tau - t) e^{\frac{c^2}{2}(t+\tau)}$.

Ч.т.д.

Список литературы

1. Shishkina E.L. Transmutations, singular and fractional differential equations with applications to mathematical physics / E.L. Shishkina, S.M. Sitnik // Elsevier, Amsterdam; 2020. 592 p.

2. Шишкина Э. Л., Алзамили Х., Кудоси А. М., Ситник С. М. Приложения операторов преобразования типа Векуа – Эрдейи – Лаундеса к дифференциальным уравнениям / Шишкина Э. Л., Алзамили Х., Кудоси А. М., Ситник С. М. // Прикладная математика & Физика. 2024. № 56 (1). С. 27–34.

References

1. Shishkina E.L. Transmutations, singular and fractional differential equations with applications to mathematical physics / E.L. Shishkina, S.M. Sitnik // Elsevier, Amsterdam; 2020. 592 p.

2. Shishkina E. L., Alzamili H., Qudosy A. M., Sitnik S. M. 2024. Applications of Transmutations of Vekua – Erd’elyi – Lowndes Type to Differential Equations. Applied Mathematics & Physics, № 56(1). С. 27–34.