

DOI: 10.58168/OpEq2025_71-86

УДК 004.932

**ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАДОНА
К ШУМУ ПРИ ОБНАРУЖЕНИИ ПРЯМЫХ ЛИНИЙ
НА ИЗОБРАЖЕНИЯХ**

**INVESTIGATION OF THE STABILITY OF RADON-TO-NOISE CONVERSION
DURING LINE DETECTION IN IMAGES**

Кожемякин Никита Сергеевич

студент 4 курса факультета прикладной математики, информатики и механики

ВГУ, г. Воронеж, Россия

Kozhemiakin Nikita Sergeevich

4th year student of the Faculty of Applied Mathematics, Computer Science and

Mechanics of VSU, Voronezh, Russia

Аннотация. В данной статье рассматриваются модификации преобразования Радона, направленные на обнаружение прямых линий на зашумленных изображениях. Проведён сравнительный анализ трёх подходов: классического преобразования, пороговой и локальной модификаций. Пороговая модификация реализует предварительное подавление слабых интенсивностей, в то время как локальная ограничивает область интегрирования по длине отрезка. Для каждого метода проведены эксперименты с использованием синтетических изображений при различных уровнях шума. На основе анализа пиков и восстановленных линий показано, что каждая модификация обладает своими преимуществами и применима в разных условиях. Работа подчёркивает актуальность задачи и необходимость дальнейшего исследования преобразования Радона в области поиска линий на изображении.

Abstract. This paper considers modifications of the Radon transform aimed at detecting straight lines in noisy images. A comparative analysis of three approaches is presented: the classical Radon transform, the thresholded modification, and the localized integration. The thresholded approach suppresses low-intensity values prior to transformation, while the localized method limits the integration region to a finite-length segment. Each method was tested on synthetic images with varying levels of noise. Based on the analysis of peaks in the sinogram and the reconstructed lines, it is shown that each modification has its own advantages and is applicable under different conditions. The study highlights the relevance of the problem and the need for further research on the Radon transform in the context of line detection in images.

Ключевые слова: преобразование Радона, обнаружение прямых, устойчивость к шуму, пороговая фильтрация, локальная интеграция, восстановление линий.

Keywords: Radon transform, line detection, noise robustness, local maxima, thresholding, localized integration, line reconstruction.

1. Введение

Обнаружение прямых линий на изображениях является важной задачей, с которой мы сталкиваемся в разных областях, от медицинских технологий до робототехники. Одним из наиболее известных методов выделения прямых линий является преобразование Радона. С его помощью изображение преобразуется в параметрическое пространство, где линии отображаются как локальные максимумы. Это делает процесс обнаружения более удобным для автоматической обработки. Однако классическое преобразование Радона обладает серьезным недостатком - чувствительностью к шуму, который неизбежно присутствует в реальных изображениях.

2. Классическое преобразование Радона

Преобразование Радона функции двух переменных $f(x, y)$ определяется как интеграл этой функции вдоль прямой, заданной в параметрическом виде, и выражается следующей формулой:

$$R(s, \alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s \cos \alpha - z \sin \alpha, s \sin \alpha + z \cos \alpha) dz \quad (1)$$

где s - расстояние от начала координат до прямой, α - угол между прямой и осью x , z - переменная, задающая положение вдоль прямой.

Данное представление удобно для геометрической интерпретации, однако в вычислительных приложениях, таких как обработка изображений, чаще используется эквивалентная формула с применением дельта-функции Дирака:

$$R(s, \alpha) = \iint_{R^2} f(x, y) \delta(s - x \cos \alpha - y \sin \alpha) dx dy \quad (2)$$

где $\delta(\cdot)$ - дельта-функция, которая выделяет множество точек (x, y) , лежащих на прямой с параметрами (s, α) . Такое представление особенно удобно при дискретизации и построении алгоритмов выделения прямых на цифровом изображении.

В задачах нахождения прямых линий преобразование Радона применяется следующим образом. Изображение $I(x, y)$ трактуется как дискретная двумерная функция, и для каждого направления α и набора расстояний s вычисляется сумма значений пикселей, лежащих на соответствующих прямых. Полученное двумерное распределение $R(\alpha, s)$, называемое синограммой или результатом преобразования, содержит локальные максимумы в тех точках параметрического пространства, где проекция изображения имеет выраженную линейную структуру. Таким образом, задача выделения прямых на изображении сводится к поиску пиков на синограмме.

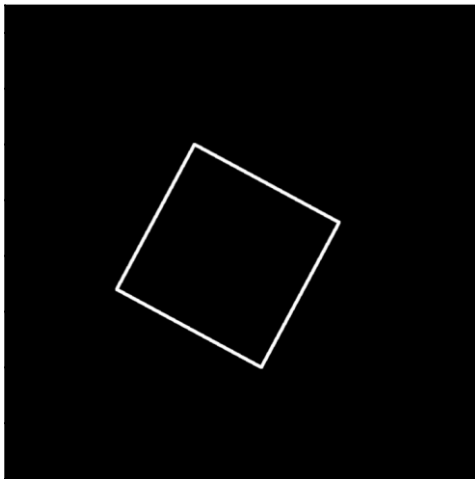
2.1 Преобразование Радона при обнаружении линий

В данном экспериментальном исследовании использовалась дискретная реализация классического преобразования Радона, представленная в функции `radon` из библиотеки `scikit-image` (Python).

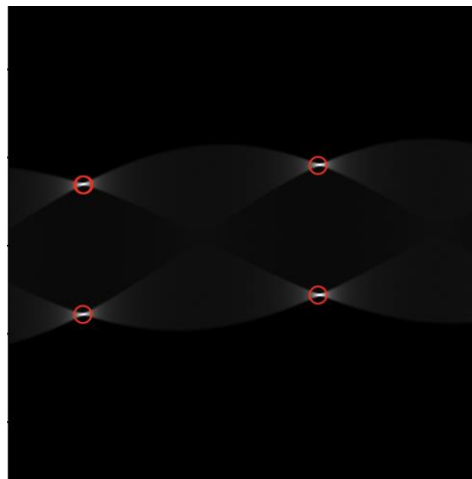
Тестовые изображения представляли собой ромбовидную структуру, нарисованную на чёрном фоне.

Для моделирования реальных искажений к изображениям добавлялся гауссовский шум с нулевым средним и двумя уровнями дисперсии:

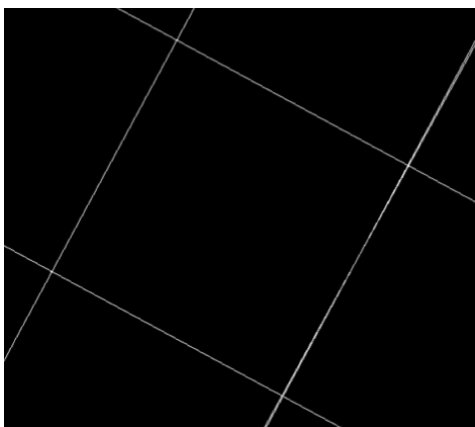
- слабый шум: $\sigma = 0.05$,
- сильный шум: $\sigma = 0.2$.



(a) Исходное изображение



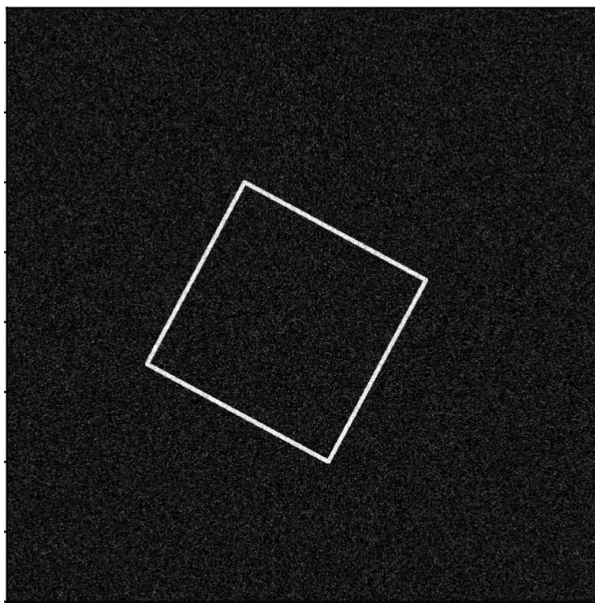
(b) Преобразование Радона



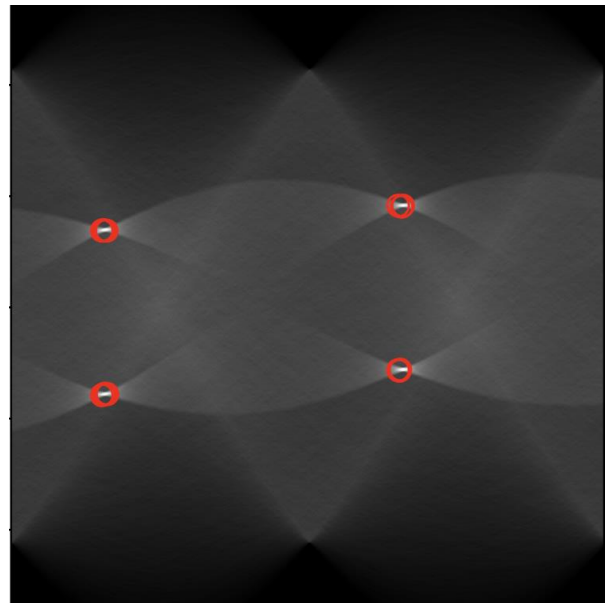
(c) Восстановленные линии

Рис. 1.1: результат работы преобразования Радона с последующим восстановлением линий

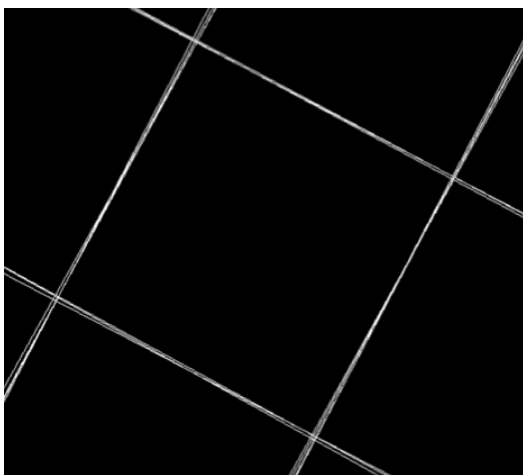
Получены результаты применения классического преобразования Радона к изображению ромба без добавления шума (рис.1.1). На исходном изображении (рис. 1.1a) отчётливо видны границы фигуры. Результаты преобразования (рис. 1.1b) демонстрируют четыре выраженных пика, соответствующих ориентациям сторон ромба. На восстановленном изображении (рис. 1.1c) видно, что линии точно соответствуют исходной структуре. Это подтверждает корректную работу алгоритма в идеальных условиях.



(a) Исходное изображение



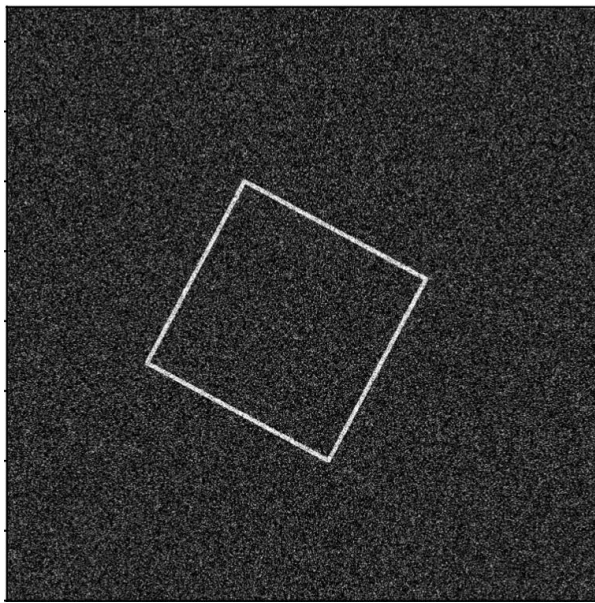
(b) Преобразование Радона



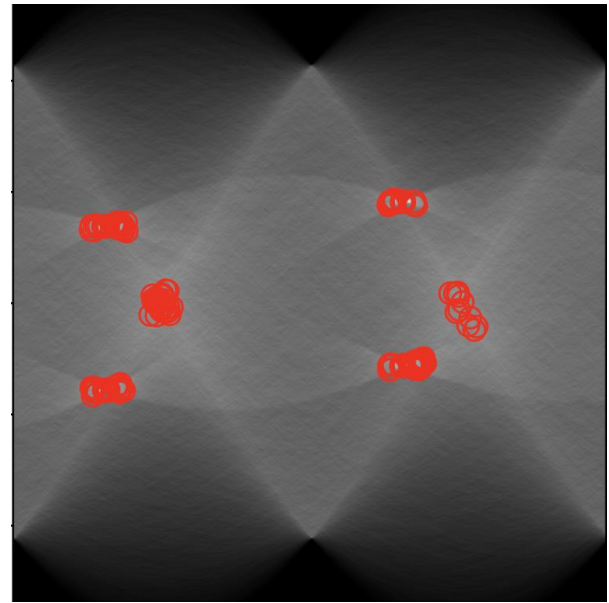
(c) Восстановленные линии

Рис. 2.1: результат работы преобразования Радона при шуме с коэффициентом $\sigma = 0.05$ с последующим восстановлением линий

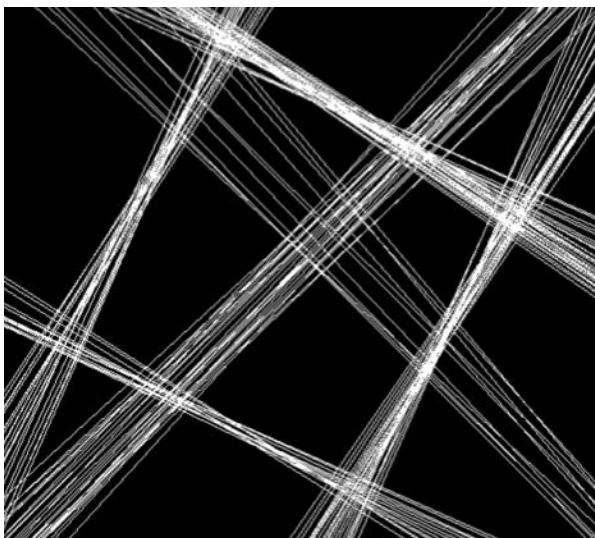
При слабом шуме с дисперсией $\sigma = 0.05$, результаты приведены на рисунке 2.1. На исходном изображении (рис. 2.1a) заметны искажения структуры, однако форма ромба всё ещё различима. Результаты преобразования (рис. 2.1b) сохраняют основные пиковые области, хотя наблюдается некоторое расширение и размытость пиков, вызванная шумом. Несмотря на это, восстановленное изображение (рис. 2.1c) всё ещё позволяет корректно выделить основные прямые, хотя уже появляются дополнительные ложные срабатывания.



(a) Исходное изображение



(b) Преобразование Радона



(c) Восстановленные линии

Рис. 2.2: результат работы преобразования Радона при шуме с коэффициентом $\sigma = 0.2$ с последующим восстановлением линий

Существенное ухудшение результатов наблюдается при сильном шуме с дисперсией $\sigma = 0.2$ (рис. 2.2). Изображение (рис. 2.2a) почти полностью теряет различимость исходной структуры. На результатах преобразования (рис. 2.2b) появляются многочисленные пиковые области, вызванные шумом. Это приводит к росту количества восстановленных линий (рис. 2.2c): на изображении появляются как истинные, так и ложные прямые, что делает результат трудно интерпретируемым.

Классическое преобразование Радона эффективно в условиях отсутствия или слабого шума. Однако при увеличении интенсивности шума происходит резкое снижение точности. Это указывает на необходимость применения модификаций классического метода, которые могут повысить устойчивость к шуму, таких как пороговая и локальная модификации, рассмотренные далее.

3. Пороговое преобразование Радона

Для повышения устойчивости преобразования Радона к шуму можно применить простую, но эффективную модификацию - **пороговое преобразование Радона**. Идея заключается в том, чтобы при вычислении учитывать только те точки изображения, значения которых превышают определённый порог, соответствующий значимым структурам. Таким образом, вклад слабых (возможно шумовых) пикселей в интеграл подавляется, а вклад сильных контурных элементов усиливается.

Определим пороговую функцию $f_T(x, y)$ по следующему правилу:

$$f_T(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{при } f(x, y) \geq T \\ 0, & \text{в других случаях} \end{cases}$$

где $T > 0$ - выбранное пороговое значение. Тогда пороговое преобразование Радона имеет следующий вид (3):

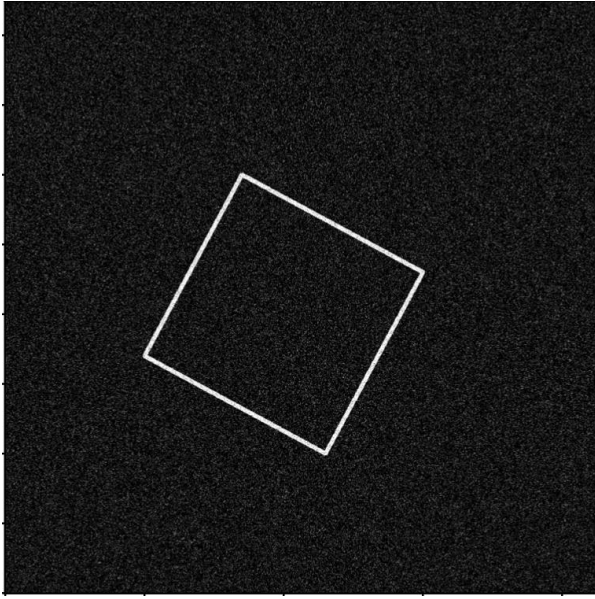
$$R_T(s, \alpha) = \iint_{R^2} f_T(x, y) \delta(s - x \cos \alpha - y \sin \alpha) dx dy \quad (3)$$

Таким образом, интегрирование вдоль прямой осуществляется только по тем точкам, где интенсивность изображения превышает порог T , а остальные значения обнуляются. Выбор значения порога T может быть как фиксированным, так и динамичным, например, по критерию Отсу или по медианному значению. В данной работе использовался порог по критерию Отсу.

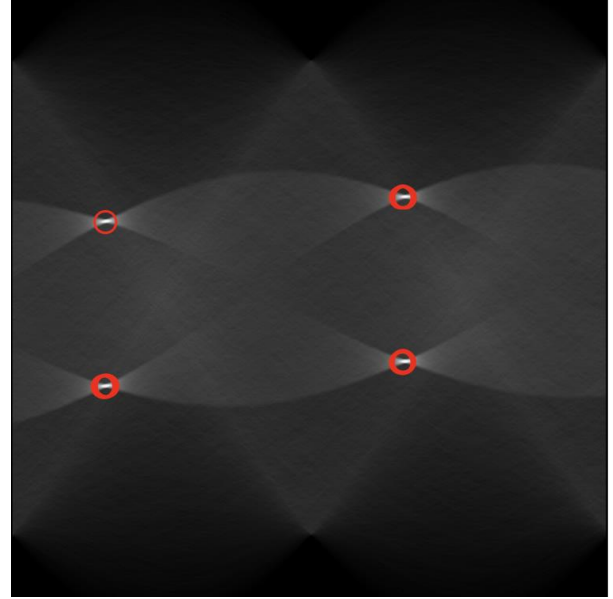
3.1 Пороговое преобразование Радона при обнаружении линий

В рамках экспериментального исследования устойчивости преобразования Радона к шуму была реализована пороговая модификация. В качестве основы использовалась дискретная реализация классического преобразования Радона, представленная в функции `radon` из библиотеки `scikit-image` (Python). Все остальное окружение и тестовые данные не изменялись, они аналогичны данным в экспериментальной части, связанной с классическим преобразованием Радона.

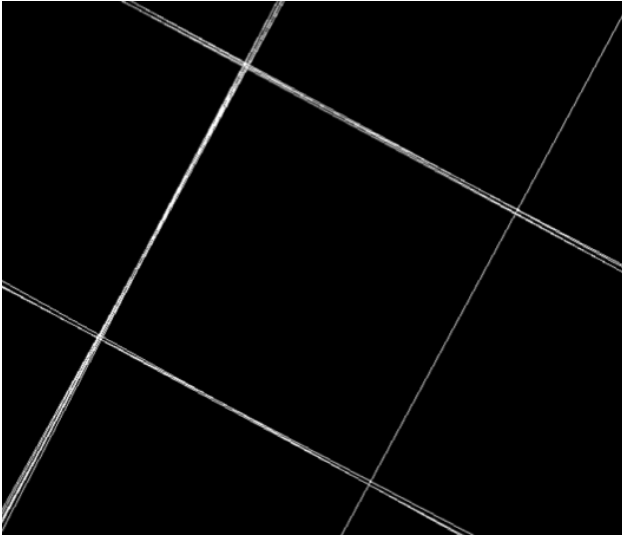
Пороговая фильтрация осуществлялась до применения преобразования Радона: все значения пикселей изображения, не превышающие заданный порог, обнулялись. Величина порога T определялась автоматически по критерию Отсу с помощью функции `threshold_otsu` из `scikit-image`. Так сохранялись наиболее интенсивные участки изображения.



(a) Исходное изображение

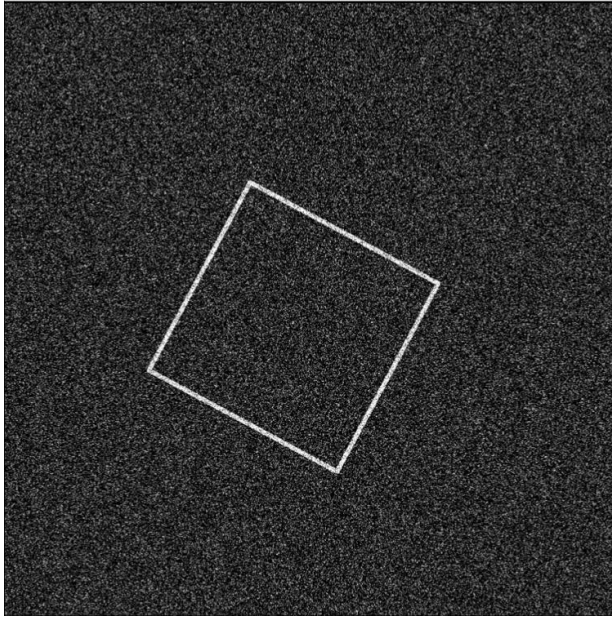


(b) Преобразование Радона (пороговое)

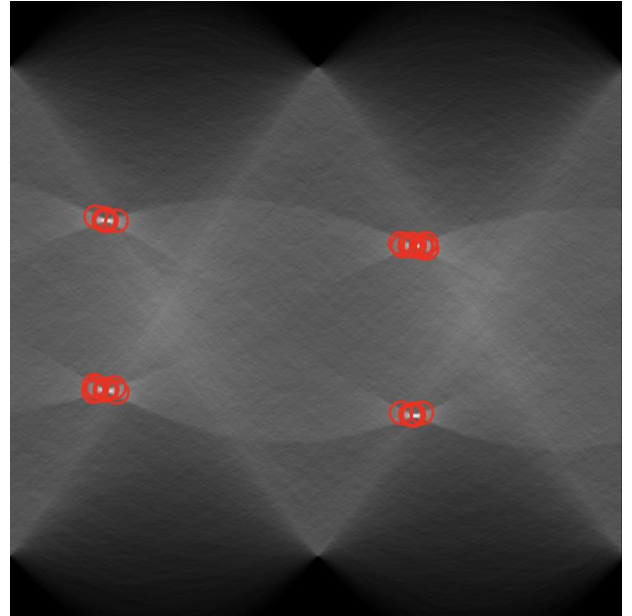


(c) Восстановленные линии

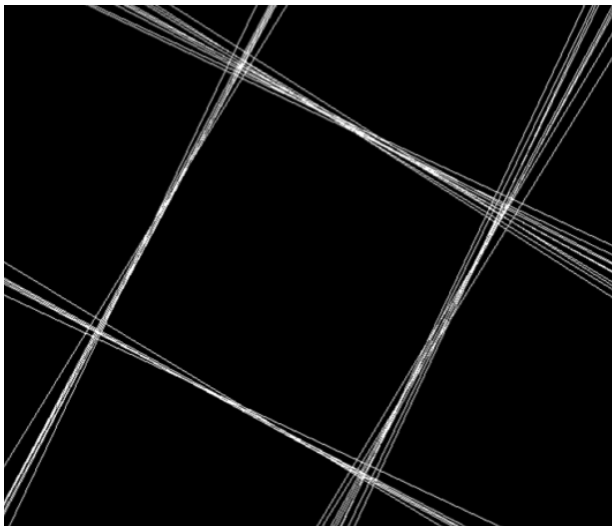
Рис. 3.1: результат работы порогового преобразования Радона при шуме с коэффициентом $\sigma = 0.05$ с последующим восстановлением линий



(a) Исходное изображение



(b) Преобразование Радона (пороговое)



(c) Восстановленные линии

Рис. 3.2: результат работы порогового преобразования Радона при шуме с коэффициентом $\sigma = 0.2$

Получены результаты применения порогового преобразования Радона к изображению ромба при слабом шуме $\sigma = 0.05$ (рис.3.1). Результаты преобразования (рис. 3.1b) чётко выделяют четыре основных пика, соответствующих сторонам фигуры. Восстановленные линии (рис. 3.1c)

подтверждают, что после фильтрации удалось корректно определить геометрию ромба.

Далее представлены результаты при сильном шуме $\sigma = 0.02$. Несмотря на значительное искажение изображения и повышение фона, метод всё ещё способен извлекать основные направления ромба. Результаты преобразования содержат ряд дополнительных слабых пиков (рис. 3.2b). Восстановление линий (рис. 3.2c) демонстрирует умеренное количество ложных срабатываний. Основные линии ромба видно, но можно заметить достаточное количество ложных линий. Это говорит о неэффективности данного преобразования на сильно зашумленных изображениях, но при этом полученные результаты лучше, чем в классическом преобразовании Радона (рис. 2.1, рис. 2.2).

4. Локальное преобразование Радона

Пороговая модификация преобразования Радона направлена на фильтрацию по значению яркости, устраняя вклад слабых пиков, которые могут быть обусловлены шумом. Данный подход является глобальным, как и само классическое преобразование Радона (2) : интегрирование происходит по всей бесконечной прямой, проходящей через всё изображение. Даже при пороговой фильтрации шумы могут давать вклад в синограмму, особенно в условиях высокой интенсивности шума.

Следующим логичным шагом является ограничение области интегрирования - не по яркости, а по пространству, с целью повышения устойчивости к шуму. Перейдем к такому понятию, как **локальное преобразование Радона** - модификации, в которой классическое интегрирование вдоль всей прямой заменяется интегрированием по ограниченному отрезку заданной длины. Для этого нам необходимо внести некоторые изменения в форму записи преобразования Радона с дельта-функцией. Любая точка (s, α) может быть задана следующим образом:

$$x(t) = x_0 - t \sin \alpha; \quad y(t) = y_0 + t \cos \alpha, \quad t \in R$$

где $x_0 = s \cos \alpha + c_x$; $y_0 = s \sin \alpha + c_y$ и (c_x, c_y) - координаты центра изображения. Это позволяет получить следующий вид преобразования

$$R(s, \alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x(t), y(t)) dt \quad (4)$$

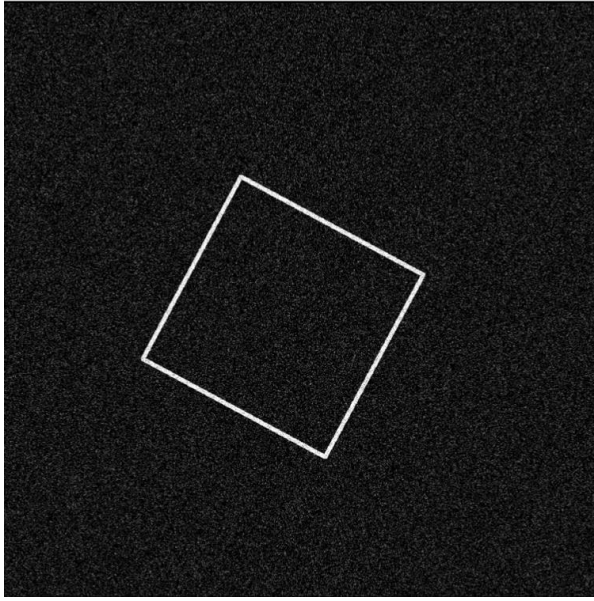
Далее нам необходимо локализовать преобразование Радона (4), чтобы повысить устойчивость метода к шуму. Именно поэтому вводится ограничение области интегрирования вдоль прямой, сохраняя только её центральную часть длины $2L$. Получаем следующее:

$$R_L(s, \alpha) = \int_{-L}^L f(x(t), y(t)) dt \quad (5)$$

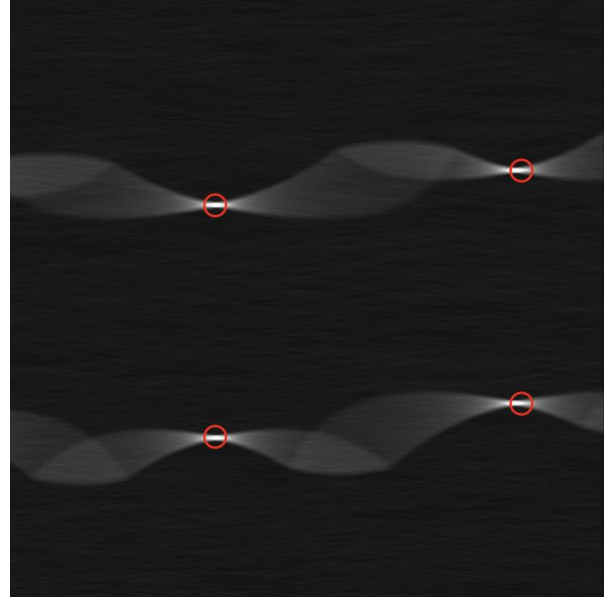
где $L > 0$ - половина длины всего отрезка интегрирования.

4.1 Локальное преобразование Радона при обнаружении линий

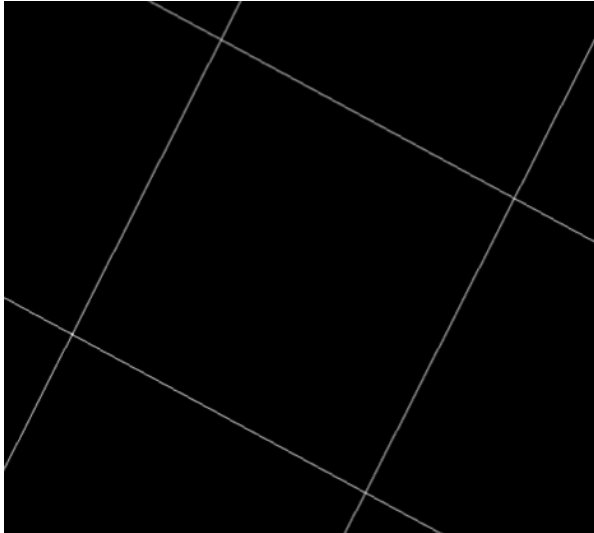
В экспериментальной части исследования была реализована локальная модификация преобразования Радона, направленная на снижение влияния шума путём ограничения длины отрезка интегрирования вдоль прямой. В отличие от классического подхода, предполагающего свёртку вдоль всей прямой, локальное преобразование Радона использует интегрирование только по определенному отрезку фиксированной длины $2L$, центрированному в каждой точке проекции. Все остальное окружение и тестовые данные не изменялись, они аналогичны данным в экспериментальной части, связанной с классическим преобразованием Радона.



(a) Исходное изображение

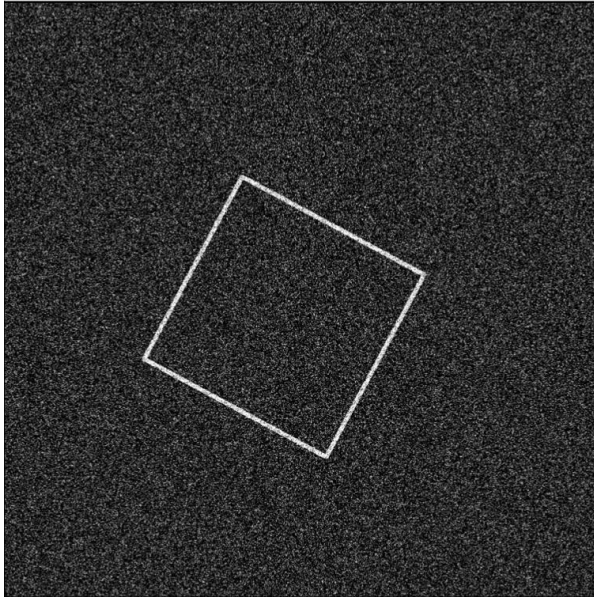


(b) Преобразование Радона (локальное)

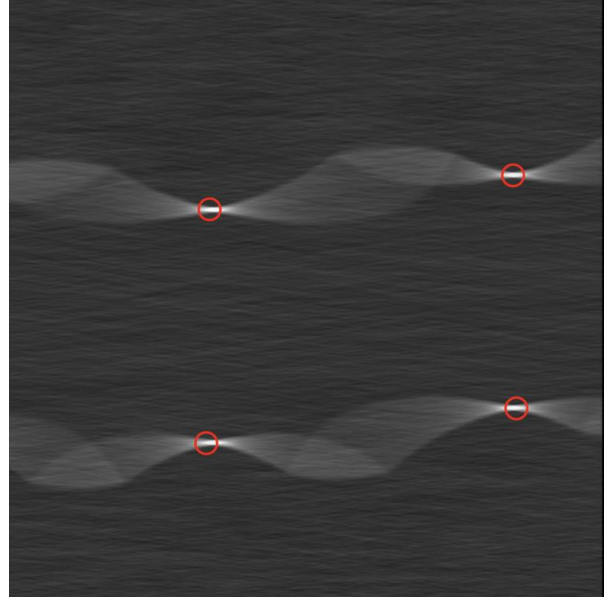


(c) Восстановленные линии

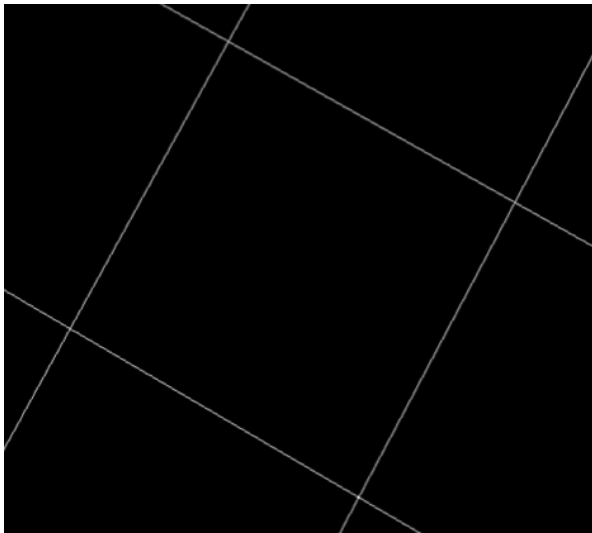
Рис. 3.1: результат работы локального преобразования Радона при шуме с коэффициентом $\sigma = 0.05$ с последующим восстановлением линий



(a) Исходное изображение



(b) Преобразование Радона (локальное)



(c) Восстановленные линии

Рис. 4.2: результат работы локального преобразования Радона при шуме с коэффициентом $\sigma = 0.2$ с последующим восстановлением линий

Получены результаты применения локального преобразования Радона к изображению ромба при слабом шуме $\sigma = 0.05$ (рис.3.1). Видно, что результаты преобразования (рис. 4.1b) имеют выраженные пики, соответствующие реальным структурам изображения. Восстановленные линии (рис. 4.1c) точно

совпадают с геометрией исходного изображения, при этом полностью отсутствуют ложные линии.

Далее представлены результаты при сильном шуме $\sigma = 0.02$ (рис. 4.2). Несмотря на значительное зашумление, локальное преобразование сохраняет устойчивость: отсутствуют ложные пики (рис. 4.2b), все четыре ожидаемые линии выделены корректно, количество ложных линий сведено к минимуму (рис. 4.2c)

Хотя и локальное преобразование показало себя хорошо на тестовых данных, с учетом его ограничений, оно может быть неэффективно, если линии занимают все пространство изображения.

5. Вывод

В данной работе была проведена серия экспериментов, направленных на исследование устойчивости различных вариантов преобразования Радона к шуму при обнаружении прямых линий на изображениях. Рассмотрены три подхода: классическое преобразование Радона, его пороговая модификация и локальная модификация с ограничением области интегрирования.

Полученные результаты показали, что при отсутствии или слабом уровне шума классическое преобразование Радона обеспечивает точное восстановление линейных структур. Однако при повышении зашумленности точность резко снижается: результаты преобразования наполняются ложными пиками, а количество ошибочных линий увеличивается. Пороговая модификация, реализующая предварительное исключение слабых интенсивностей, показала улучшение результатов, особенно при умеренной зашумленности. Тем не менее, при сильном шуме и она теряет эффективность. Наиболее устойчивым методом оказалось локальное преобразование Радона.

При этом важно отметить, что ни одна из модификаций не является универсально наилучшей. Каждая из них может быть эффективна в определенной ситуации: пороговая - при выделении четких, ярко выраженных

структур, локальная - при нахождении коротких или частично разрушенных контуров в зашумленных данных, классическая - при высоком качестве исходного изображения.

Список литературы

1. Преобразование Радона на плоскости : учебно-методическое пособие для вузов : [для студ. 4 к. очной формы обучения направления 010400.62 - Приклад.математика и информатика] / Воронеж. гос. ун-т ; [сост.: Л.Н. Ляхов и др.]. - Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2011, С. 11-23, 68-73.

2. Тофт, П. Преобразование Радона - теория и реализация. Технический университет Дании, 1996.

3. Оцу, Н. Метод выбора порога из гистограммы уровней яркости // IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Т. 9, № 1, 1979. С. 62-66.

4. Гонсалес Р. С., Вудс Р. Е. Цифровая обработка изображений. - 3-е изд., пер. с англ. - М.: Техносфера, 2012.

References

1. The Radon Transform on the Plane: Educational manual for universities [for 4th-year full-time students of the program 010400.62 - Applied Mathematics and Informatics] / Voronezh State University; compiled by L.N. Lyakhov et al. - Voronezh: IPC VSU, 2011. - pp. 11-23, 68-73.

2. Toft, P. A. The Radon Transform - Theory and Implementation. Technical University of Denmark, 1996, p.

3. Otsu, N. A threshold selection method from gray-level histograms // IEEE Trans. Systems, Man, and Cybernetics, Vol. 9, no. 1, 1979, P. 62-66.

4. Gonzalez R. C., Woods R. E. Digital Image Processing. - 3rd ed. - Upper Saddle River: Pearson Education, 2008.