

DOI: 10.58168/OpEq2025_87-92

УДК 517.926

**ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД АНАЛИЗА СУЩЕСТВОВАНИЯ
ПЕРИОДИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО
УРАВНЕНИЯ**

**GEOMETRIC METHOD FOR ANALYZING THE EXISTENCE OF A PERIODIC
SOLUTION TO A DIFFERENTIAL EQUATION**

Коротких Анастасия Сергеевна

преподаватель кафедры математики ВГЛТУ, г. Воронеж, Россия

Korotkih Anastasya Sergeevna

Lecturer of the Department of Mathematics at Voronezh State University of Forestry
and Technologies named after G.F. Morozov, Voronezh, Russia

Аннотация. В статье рассматриваются особенности геометрического исследования существования решений периодической задачи для дифференциальных уравнений.

Abstract. The article discusses the features of a geometric study of the existence of solutions to a periodic problem for differential equations.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, периодическое решение, оператор сдвига.

Keywords: differential equation, periodic solution, shift operator.

Пусть в m -мерном векторном пространстве E^m задана точка x с координатами:

$$x = (\omega_1, \dots, \omega_m)$$

Запишем закон движения точки x в пространстве E^m в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений

[illegible]

Этот закон движения можно записать в векторном виде:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad (1)$$

Пусть функция $f(t, x)$ – непрерывна по совокупности переменных и определена для всех значений $t, \omega_1, \dots, \omega_m \in (-\infty; +\infty)$.

Введем начальные условия вида

$$x(s) = x_0 \quad (2)$$

такие, что каждому начальному условию соответствует единственное решение дифференциального уравнения (1). Соответствующее решение будет иметь вид:

$$x(t) = p(t; s; x_0). \quad (3)$$

Пусть решение (3) определено для всех $-\infty < t < +\infty$.

Определение 1. Точка $x_0 \in E^m$, двигаясь по траекториям уравнения (1) за промежуток времени от s до t , перейдет в некоторую новую точку x_1 этого же пространства. Оператором сдвига по траекториям системы (1) называется оператор вида $U(t, s)$, задающий переход от x_0 к x_1 .

Из определения ясно, что оператор $U(t, s)$ совпадает с решением уравнения (1), поэтому справедливо равенство

$$U(t, s)x_0 = p(t; s; x_0).$$

Перейдем к рассмотрению периодической задачи. Для этого будем считать, что функция $f(t, x)$ из уравнения (1) удовлетворяет равенству

$$f(t + T, x) \equiv f(t, x)$$

Для ответа на вопрос о существовании T -периодического решения уравнения (1) необходимо исследовать оператор сдвига по траекториям системы

ДУ, соответствующей уравнению (1), совпадающий с решением данного уравнения.

Рассмотрим оператор сдвига в промежутке времени от 0 до T :

$$Ux = U(T, 0)x \quad (4)$$

Очевидно, что если $x(0)$ является неподвижной точкой оператора (4), то решение $x(t)$ уравнения (1) будет T -периодическим. Верно и обратное утверждение.

Таким образом, задача о доказательстве существования периодического решения системы ДУ, записанной в виде (1), сводится к доказательству существования неподвижных точек оператора сдвига (4). Для этого можно использовать такой метод, как теория векторных полей.

Рассмотри поле

$$Qx = x - U(T)x. \quad (5)$$

Для того, чтобы у оператора (4) существовали неподвижные точки, необходимо, чтобы существовала ограниченная область Ω с границей L , такая, что поле (5) имеет на этой границе топологическую степень, не равную нулю. В качестве такой области удобно выбрать шар такого радиуса R , чтобы все потенциальные T -периодические решения уравнения (1) входили в этот шар $\|x\| \leq R$. Для этого перед выбором области Ω проводится априорная оценка T -периодических решений. Главным аспектом является установление того факта, что топологическая степень векторного поля (5) не будет равна нулю. Так как оператор сдвига задается в неявном виде, применяются методы, разработанные М.А. Красносельским и А.И. Перовым. Многие принципы основываются на понятии точки T -невозвращаемости траекторий, однако в большинстве случаев затруднен поиск таких точек, поэтому наиболее удобным способом исследования является метод направляющих функций, сформулированный в [2]. С помощью данного метода можно вычислить топологическую степень векторного поля (5) [1].

Рассмотрим применения этого метода на примере системы, удовлетворяющей виду (1):

$$\begin{cases} \frac{d\varepsilon_1}{dt} = a\varepsilon_1^3 + 3b\varepsilon_1^2\varepsilon_2 + c\varepsilon_1\varepsilon_2^2 + d\varepsilon_2^3 + \varphi_1(t, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \\ \frac{d\varepsilon_2}{dt} = b\varepsilon_1^3 + c\varepsilon_1^2\varepsilon_2 + 3d\varepsilon_1\varepsilon_2^2 + e\varepsilon_2^3 + \varphi_2(t, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \end{cases}$$

Необходимо указать правильную направляющую функцию данной системы и если ее индекс окажется отличным от нуля, то по сформулированному выше принципу, система будет иметь хотя бы одно T -периодическое решение. Для указания такой направляющей функции, которая бы удовлетворяла леммам и теоремам [2], необходимо ввести следующие ограничительные условия на систему уравнений: функции $\varphi_1(t, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ и $\varphi_2(t, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ должны T -периодичны по t и

$$\lim_{|\varepsilon_1|+|\varepsilon_2| \rightarrow \infty} \frac{\varphi_1(t, \varepsilon_1, \varepsilon_2)}{|\varepsilon_1|^3 + |\varepsilon_2|^3} = \lim_{|\varepsilon_1|+|\varepsilon_2| \rightarrow \infty} \frac{\varphi_2(t, \varepsilon_1, \varepsilon_2)}{|\varepsilon_1|^3 + |\varepsilon_2|^3} \quad (6)$$

Направляющая функция должна быть невырожденной, для этого уравнения

$$\begin{aligned} ak^3 + 3bk^2 + ck + d &= 0 \\ bk^3 + ck^2 + 3dk + e &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

не должны иметь общих вещественных корней и

$$|a| + |b| > 0 \quad (8)$$

При выполнении перечисленных условий, заданная система становится системой с главной потенциальной частью и принимает вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \varepsilon_1} = a\varepsilon_1^3 + 3b\varepsilon_1^2\varepsilon_2 + c\varepsilon_1\varepsilon_2^2 + d\varepsilon_2^3 \\ \frac{\partial \Phi_0}{\partial \varepsilon_2} = b\varepsilon_1^3 + c\varepsilon_1^2\varepsilon_2 + 3d\varepsilon_1\varepsilon_2^2 + e\varepsilon_2^3 \end{cases}$$

В таком случае легко указать направляющую функцию [4],

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{4}a\varepsilon_1^4 + b\varepsilon_1^3\varepsilon_2 + \frac{1}{2}c\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2 + d\varepsilon_1\varepsilon_2^3 + \frac{1}{4}e\varepsilon_2^4$$

Очевидно, что функция является четной, следовательно ее индекс нечетен, а как следствие, не равен нулю, что гарантирует наличие T -периодического решения системы.

Список литературы

1. Звягин, В.Г. Метод направляющих функций и его модификации / В.Г. Звягин, С.В. Корнев. – Москва: ЛЕНАНД, 2018. – 163 с.
2. Красносельский, М.А. Оператор сдвига по траекториям системы дифференциальных уравнений / М.А. Красносельский. – Москва: Наука, 1966. – 331 с.
3. Красносельский, М.А. Геометрические методы нелинейного анализа / М.А. Красносельский, П.П. Забрейко. – Москва: Наука, 1975. – 512 с.
4. Кузнецова, А.С. О периодических решениях систем с главной потенциальной частью / А.С. Кузнецова // Некоторые вопросы анализа, алгебры, геометрии и математического образования: материалы IV-й международной молодежной научной школы "Актуальные направления математического

анализа и смежные вопросы», посвященной 90-летию со дня рождения профессора Ю.Г. Борисовича / Воронежский государственный педагогический университет. – Воронеж, 2020. – С. 101-102.

5. Перов, А.И. Метод направляющих функций / А.И. Перов, В.К. Евченко. – Воронеж: Издательско-полиграфический центр ВГУ, 2012. – 182 с.

6. Векторные поля на плоскости / М.А. Красносельский, А.И. Перов, А.И. Поволоцкий, П.П. Забрейко. – Москва: Физматгиз, 1963. – 248 с.

References

1. Zvyagin, V.G. The method of guiding functions and its modifications / V.G. Zvyagin, S.V. Kornev. – Moscow: LENAND, 2018. – 163 p.

2. Krasnoselsky, M.A. The shift operator along the trajectories of a system of differential equations / M.A. Krasnoselsky. Moscow: Nauka Publ., 1966. 331 p.

3. Krasnoselsky, M.A. Geometric methods of nonlinear analysis / M.A. Krasnoselsky, P.P. Zabreiko. Moscow: Nauka Publ., 1975. 512 p.

4. Kuznetsova, A.S. On periodic solutions of systems with the main potential part / A.S. Kuznetsova // Some issues of analysis, algebra, geometry and mathematical education: materials of the ivth International Youth Scientific School "Current directions of mathematical analysis and related issues", dedicated to the 90th anniversary of the birth of Professor Yu.G. Borisovich / Voronezh State Pedagogical University. Voronezh, 2020. pp. 101-102.

5. Perov, A.I. Method of guiding functions / A.I. Perov, V.K. Evchenko. Voronezh: VSU Publishing and Printing Center, 2012.

6. Vector Fields on a Plane / M.A. Krasnoselsky, A.I. Perov, A.I. Povolotsky, and P.P. Zabreyko. – Moscow: Fizmatgiz, 1963. – 248 p.