

DOI: 10.58168/OpEq2025_93-102

УДК 517.7

**ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ УСТУПОК
ПРИ РЕШЕНИИ ВОЕННО-ПРИКЛАДНОЙ ЗАДАЧИ
МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ОБ ОПТИМАЛЬНОМ
ПЛАНИРОВАНИИ ЛИКВИДАЦИИ ТЕХНОГЕННОЙ АВАРИИ**

**THE APPLICATION OF THE METHOD OF SEQUENTIAL
CONCESSIONS IN SOLVING THE MILITARY-APPLIED TASK OF MULTI-
CRITERIA OPTIMIZATION ON OPTIMAL PLANNING FOR THE
ELIMINATION OF A MAN-MADE ACCIDENT**

Корыпаева Юлия Владимировна

кандидат физико-математических наук, доцент 206 кафедры математики

ВУНЦ ВВС «ВВА», г. Воронеж, Россия

Таболин Данила Анатольевич

курсант ВУНЦ ВВС «ВВА», г. Воронеж, Россия

Korypaeva Julia Vladimirovna

Candidate of Physical and mathematical Sciences, associate professor of the
department of mathematics of the Military Educational Research Centre of Air Force
«Air Force Academy named after professor N. E. Zhukovsky and Y. A. Gagarin»
(Voronezh)

Tabolin Danila Anatolyevich

cadet of the Military Educational Research Centre of Air Force «Air Force Academy
named after professor N. E. Zhukovsky and Y. A. Gagarin» (Voronezh)

Аннотация. В работе авторами обсуждаются вопросы многокритериальной
оптимизации в военно-прикладных задачах, а именно метод последовательных
уступок в задаче планирования ликвидации последствий техногенной

катастрофы. На основании данных о наличии комплектов для пожаротушения и ликвидации радиационного заражения, вероятностей выхода их из строя, имеющегося личного состава, сформулирована математическая модель. Модель содержит две целевых функции, одна из которых является приоритетной, и систему ограничений. С помощью графического метода решения задач линейного программирования и возможностей MS Excel 2010, авторами успешно применен метод последовательных уступок для решения многокритериальных задач, подготовлен отчет для рассмотрения лицом, принимающим решение. Отчет содержит решение задачи для разных значений уступок по первому критерию и соответствующие значения самих критериев.

Abstract. The authors discuss the issues of multi-criteria optimization in military-applied tasks, namely the method of successive concessions in the task of planning the elimination of the consequences of a man-made disaster. Based on the data on the availability of fire extinguishing and radiation contamination kits, the probabilities of their failure, and the available personnel, a mathematical model is formulated. The model contains two objective functions, one of which is a priority, and a system of constraints. Using the graphical method of solving linear programming problems and the capabilities of MS Excel 2010, the authors successfully applied the sequential assignment method to solve multi-criteria problems, and prepared a report for consideration by the decision maker. The report contains a solution to the problem for different assignment values according to the first criterion and the corresponding values of the criteria themselves.

Ключевые слова: задачи линейного программирования, графический метод, задачи многокритериальной оптимизации, метод последовательных уступок.

Keywords: linear programming problems, graphical method, multi-criteria optimization problems, sequential assignment method.

В различных областях практической деятельности часто встречаются задачи, в которых оптимальность некоторой операции приходится оценивать не по одному, а сразу по нескольким критериям $f_1, f_2, \dots, f_n$, причем одни из них требуется исследовать на максимум, а другие — на минимум. Такого рода задачи называют многокритериальными или векторными задачами оптимизации ([1], [2]).

Любой исследователь изначально понимает, что, вообще говоря, не существует решения, которое обеспечивало бы в экстремум первому критерию f_1 и одновременно доставляло бы максимум (или минимум) другому критерию f_2 , тем более тяжело и даже не реально получить такое решение для нескольких критериев. В связи с этим логично ввести понятие некоего компромиссного решения, при этом окончательный выбор решения по исследуемому вопросу предполагается волевым актом командира или лицом, принимающим решение (ЛПР). За ЛПР оставляют решение о том, какой ценой можно оплатить известное повышение эффективности или наоборот, какой долей эффективности можно пожертвовать, чтобы не нести слишком больших потерь. Все эти особенности формируют цель исследователя: предоставить в распоряжение ЛПР достаточное количество данных, позволяющих ему всесторонне оценить преимущества и недостатки каждого варианта решения и, опираясь на них, сделать окончательный выбор. В связи с этим, процедура разработки, исследования и решения многокритериальной задачи является диалоговой итеративной процедурой между ЛПР и машиной (исследователем).

Основная идея при решении задач векторной или многокритериальной оптимизации заключается в получении и обосновании методов определения компромиссных решений.

Существуют два основных подхода к решению задач векторной оптимизации. Первый подход основан на методах свертывания критериев, второй — на алгоритмах непосредственного отыскания компромиссных решений. В

настоящей работе рассмотрим применение одного из алгоритмов непосредственного отыскания компромиссных решений, а именно «метод последовательных уступок».

Постановка задачи. В некоторой воинской части имеется пожарная часть, которая имеет в наличии комплекты 2-х видов для пожаротушения и ликвидации радиационного заражения (РЗ). В таблице 1 находятся сведения о порядке формирования комплектов оборудования (КО) и личным составом (ЛС), наличие необходимого оборудования и личного состава.

Таблица 1 – Сведения о порядке формирования и наличии КО и ЛС

Номер комплекта	Оборудование 1	Оборудование 2	Оборудование 3	Оборудование 4	Личный состав
1	2	1	4	0	10
2	2	2	0	4	13
Наличие	12	8	20	12	65

Известно, что комплект вида 1 ликвидирует пожар на площади 2 га за 1 час, а комплект вида 2 ликвидирует последствия радиационного заражения на площади 3 га за 1 час. При этом в процессе пожаротушения и ликвидации РЗ может в течение часа выйти из строя комплект вида 1 с вероятностью 0,2, а комплект вида 2 с вероятностью 0,1. Требуется организовать процесс пожаротушения и ликвидации РЗ на территории 61 га таким образом, чтобы максимизировать площадь, на которой пожар потушен и минимизировать потери в оборудовании. Определить за какое время последствия катастрофы на указанной площади будут полностью устранены.

Решение. Обозначим за x_1 — количество комплектов первого вида, а x_2 — комплектов второго вида.

Составим первый критерий эффективности, выражающий площадь, на которой ликвидирован пожар и РЗ: $f_1(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$.

Составим второй критерий эффективности, выражающий математическое ожидание потерь оборудования при ликвидации аварии: $f_2(x_1, x_2) = 0,2x_1 + 0,1x_2$.

Будем считать, первый критерий более важный, тогда векторный критерий будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \max \\ \rightarrow \min \end{matrix}$$

на множестве

$$z_1 = \{(x_1, x_2) : 2x_1 + 2x_2 \leq 12, x_1 + 2x_2 \leq 8, 4x_1 \leq 20, 4x_2 \leq 12, 10x_1 + 13x_2 \leq 65, x_1 \geq 1, x_2 \geq 1\}.$$

Первый шаг. Максимизируем первый по важности критерий $f_1(x_1, x_2)$

$$\max_{z_1} f_1(x_1, x_2) = \max_{z_1} (2x_1 + 3x_2).$$

Имеем задачу линейного программирования, где $f_1(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$ — целевая функция, а

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leq 12, \\ x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ 4x_1 \leq 20, \\ 4x_2 \leq 12, \\ 10x_1 + 13x_2 \leq 65, \\ x_1 \geq 1, \\ x_2 \geq 1. \end{cases}$$

— система ограничений.

Так как целевая функция является функцией двух переменных, то эту задачу можно решить графическим методом. Для этого от системы неравенств в системе ограничения перейдем к соответствующей системе равенств и построим эти прямые в прямоугольной системе координат на плоскости Ox_1x_2 (рисунок 1).

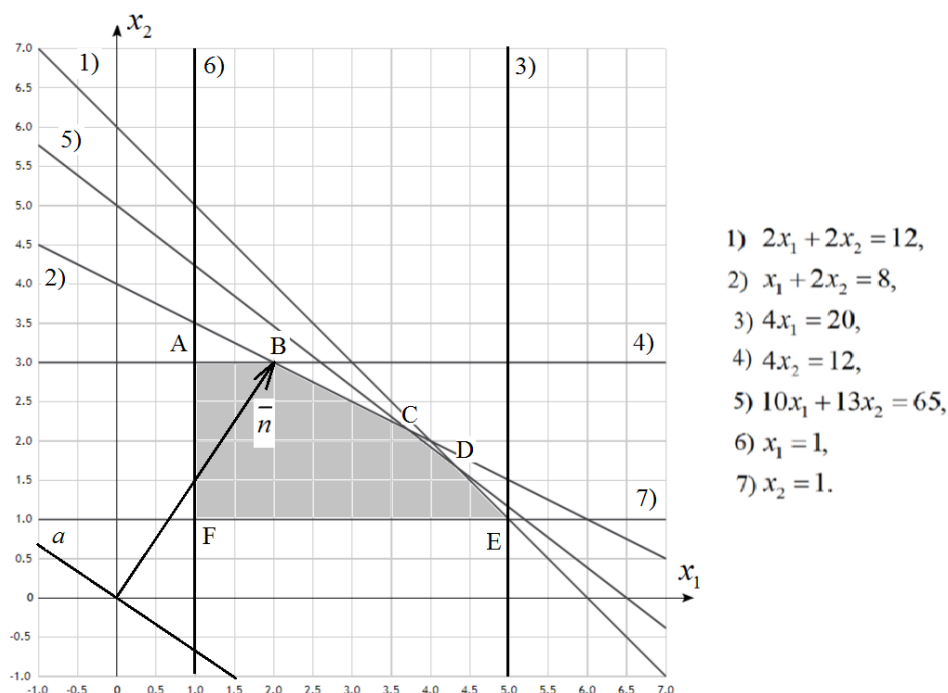


Рисунок 1 – ОДР при решении задачи максимизации первого критерия

Получим многоугольник ABCDEF, точки которого образуют область допустимых решений (ОДР). Вектор $\vec{n} = \{2; 3\}$ указывает направление возрастания функции, a – линия уровня, C – точка выхода, в ней функция $f_1(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$ достигает максимума, ее координаты $C\left(\frac{26}{7}; \frac{15}{7}\right)$. Координаты находятся в процессе решения системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 8, \\ 10x_1 + 13x_2 = 65. \end{cases}$$

Полученное решение не является целочисленным, поэтому требуется найти целочисленное решение, близкое к найденному, которое принадлежит ОДР и доставляет наибольшее значение целевой функции $f_1(x_1, x_2)$. Заметим, что банальное округление компонент решения приводит к результату $(3; 2)$, при этом значение целевой функции $f_1(3, 2) = 12$. Но если продолжить исследование точек с целочисленными координатами, близкими к $(3; 2)$ из ОДР, то заметим, что решение $(2; 3)$ даст большее значение целевой функции $f_1(2, 3) = 13$.

Следовательно, на первом шаге оптимальное решение будет $x_1^{10} = 2$, $x_2^{10} = 3$, а значение функции при найденном оптимальном решении

$$\max_{z_1} f_1(x_1, x_2) = \max_{z_1} (2x_1 + 3x_2) = f_1(2, 3) = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 13.$$

Полученное решение подставляем в критерий $f_2(x_1, x_2)$ и векторные оценки примут вид $\begin{pmatrix} f_1(x_1^{10}, x_2^{10}) \\ f_2(x_1^{10}, x_2^{10}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 0,7 \end{pmatrix}$.

Полученный результат предъявляют ЛПР. Если ЛПР не устраивает первый результат (13 га), то ему необходимо пересмотреть постановку задачи. Если же ЛПР не устраивает второй результат (0,7), то ему предлагается сделать некоторую уступку по первому критерию.

Второй шаг. Сделаем некоторую уступку по первому критерию $\Delta f_1 = -3$.

Следовательно, $f_1(x_1^{10}, x_2^{10}) + \Delta f_1 = f_1(2, 3) - 3 = 10$.

Минимизируем критерий $f_2(x_1, x_2)$:

$$\min_{z_2} f_2(x_1, x_2) = \min_{z_2} (0,2x_1 + 0,1x_2),$$

где

$$z_2 = \{(x_1, x_2) : 2x_1 + 3x_2 \geq 10, 2x_1 + 2x_2 \leq 12, x_1 + 2x_2 \leq 8, 4x_1 \leq 20, 4x_2 \leq 12, 10x_1 + 13x_2 \leq 65, x_1 \geq 1, x_2 \geq 1\}.$$

Заметим, множество z_2 получается из множества z_1 добавлением еще одного условия. На рисунке 2 это множество обозначено ABCDEKL.

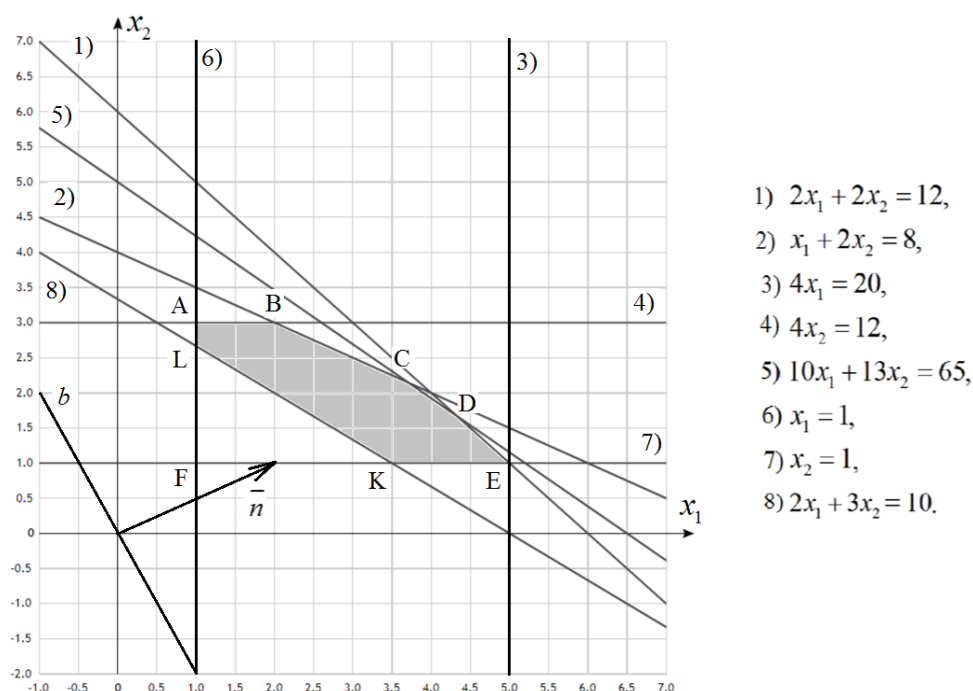


Рисунок 2 – ОДР при решении задачи максимизации второго критерия

Вектор $\bar{n} = \{0, 2; 0, 1\}$ (или коллинеарный ему $\bar{n} = \{2; 1\}$) указывает направление возрастания функции $f_2(x_1, x_2)$, b – линия уровня. Функция $f_2(x_1, x_2)$ достигает минимума в точке L (точка входа), $L\left(1; \frac{8}{3}\right)$. Координаты этой точки находятся в процессе решения системы уравнений
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 10, \\ x_1 = 1. \end{cases}$$

Анализ целочисленных решений в окрестности точки $\left(1; \frac{8}{3}\right)$ и принадлежащих ОДР приводит к оптимальному решению $x_1^{20} = 1$, $x_2^{20} = 3$.

Значение функции при найденном оптимальном решении

$$\min_{z_2} f_2(x_1, x_2) = \min_{z_2} (0, 2x_1 + 0, 1x_2) = f_2(1; 3) = 0, 2 \cdot 1 + 0, 1 \cdot 3 = 0, 5.$$

Векторные оценки имеют вид $\begin{pmatrix} f_1(x_1^{20}, x_2^{20}) \\ f_2(x_1^{20}, x_2^{20}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0,5 \end{pmatrix}$. Время, за которое последствия катастрофы на указанной площади 61 га будут полностью устранены, $t_{\text{тушение пожара}} = \frac{61}{1} = 61 \text{ час}$, $t_{\text{ликвидация РЗ}} = \frac{61}{9} \approx 6,78 \text{ час}$.

Анализируем полученный результат. Если ЛПР полученный результат устраивает, то задача решена. Если полученный результат ЛПР не устраивает, то диалог продолжается.

Специалист может рассмотреть ситуации, когда уступка на втором шаге будет иметь другие значения, и рассчитать (например, в MS Excel 2010) векторные оценки критериев. В нашем случае эти расчеты могут быть предоставлены в виде таблицы 2.

Исходя из результатов таблицы, видно, что при участии одного комплекта пожаротушения и трех комплектов для ликвидации РЗ достигается максимальное значение площади и минимальное значение математического ожидания потерь.

Таблица 2 – Расчет критериев при разных значениях уступки

Уступка по 1-му критерию	Значение x_1	Значение x_2	Значение 1-го критерия	Значение 2-го критерия
3	1	3	10	0,5
2	1	3	11	0,5
1	1	3	12	0,5
0	2	3	13	0,7

Таким образом, следует признать реализованный авторами подход удобным, обладающим гибкостью, и не встречающим трудностей в машинной реализации (например, с помощью MS Excel 2010 или вручную), специалисту

достаточно обладать основами знаний в области методов оптимизации и линейного программирования). Предлагаемый подход востребован с практической точки зрения, множество задач, для которых предлагаемая методика является подходящей, крайне велик.

Список литературы

1. Соболев И.М., Статников Р.Б. Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями. М.: Дрофа, 2006. – 175 с.
2. Коротченко А.Г., Кумагина Е.А., Сморякова В.М. Введение в многокритериальную оптимизацию. Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2017. – 55 с.

References

1. Sobol I.M., Statnikov R.B. The choice of optimal parameters in problems with many criteria. Moscow: Drofa, 2006. – 175 p.
2. Korotchenko A.G., Kumagina E.A., Smoryakova V.M. Introduction to multicriteria optimization. Educational and methodical manual. Nizhny Novgorod: Nizhny Novgorod State University, 2017. – 55 p.