

DOI: 10.58168/OpEq2025_166-178

УДК 517.968

**МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ СЕМЕЙСТВО РЕШЕНИЙ
ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА В БАНАХОВОМ
ПРОСТРАНСТВЕ**

**A MULTIPARAMETRIC FAMILY OF SOLUTIONS TO THE VOLTERRA
INTEGRAL EQUATION IN BANACH SPACE**

Сапронов Иван Васильевич

кандидат физико-математических наук, доцент,
доцент кафедры математики ВГЛУ, г. Воронеж, Россия

Зенина Вероника Валериевна

старший преподаватель кафедры математики ВГЛУ, г. Воронеж, Россия

Смирнова Елена Владимировна

кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры математики ВГЛУ, г. Воронеж, Россия

Sapronov Ivan Vasilievich

Ph.D. of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate
Professor at the Department of Mathematics, VSUFT, Voronezh, Russia

Zenina Veronika Valerievna

Senior Lecturer at the Department of Mathematics, VSUFT, Voronezh, Russia

Smirnova Elena Vladimirovna

Ph.D. of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor at the Department
of Mathematics, VSUFT, Voronezh, Russia

Аннотация. В специально введенном банаховом пространстве изучается интегральное уравнение Вольтерра с ядром третьего порядка, имеющим конечное число производных вблизи нуля. При некоторых ограничениях на

спектр операторного пучка, соответствующего интегральному оператору, строится многопараметрическое семейство решений.

Abstract. In a specially introduced Banach space, the Volterra integral equation with a third-order kernel having a finite number of derivatives near zero is studied. Under certain restrictions on the spectrum of the operator bundle corresponding to the integral operator, a multi-parameter family of solutions is constructed.

Ключевые слова: собственный вектор, обратный оператор, функциональное пространство, характеристическое число, частное решение.

Keywords: eigenvector, inverse operator, functional space, characteristic number, partial solution.

Введение

В действительном функциональном пространстве задана $\|\cdot\|_E$. Ей соответствует в пространстве $L(E)$ всех отображений на E соответствующая норма

$$\|A\|_{L(E)} = \sup_{\|x\|_E=1} \|Ax\|_E.$$

В пространстве $B([0, \delta], E)$ норма выглядит следующим образом

$$\|\alpha(x)\|_{B([0, \delta], E)} = \sup_{0 \leq x \leq \delta} \|\alpha(x)\|_E.$$

Рассмотрим семейство банаховых пространств

$$Q_\gamma^k = \{\alpha(x): \alpha^{(i)}(x) = x^{\gamma-i} \omega_i(x), \omega_i(x) \in B([0, \delta], E);$$

$$\|\alpha(x)\|_{Q_\gamma^k} = \max_{0 \leq i \leq k} \|\omega_i(x)\|_{B([0, \delta], E)}\}.$$

Изучается интегральное уравнение

$$\int_0^x K(x, t) \varphi(t) dt = f(x), \quad 0 \leq x \leq \delta \quad (1)$$

с ядром третьего порядка, имеющим конечное число производных вблизи нуля.

Пусть существуют пределы $C_0 = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{K(x, x)}{x^3}$, $C_1 = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{K'_t(x, x)}{x^2}$,
 $C_2 = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{K''_{tt}(x, x)}{x}$, $C_3 = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{-K^{(3)}_{t^3}(x, x)}{x^0}$, причем C_0 имеет ограниченный обратный C_0^{-1} .

Отсюда следует, что при достаточно малом x

$$\left\| \frac{K(x, x)}{x^3} - C_0 \right\|_{L(E)} < \varepsilon, \left\| \frac{-K'_t(x, x)}{x^2} - C_1 \right\|_{L(E)} < \varepsilon, \left\| \frac{K''_{tt}(x, x)}{x} - C_2 \right\|_{L(E)} < \varepsilon,$$

$$\left\| \frac{-K^{(3)}_{t^3}}{x^0} - C_3 \right\|_{L(E)} < \varepsilon \quad (2)$$

Лемма 1. Уравнение (1) имеет решение $\varphi(x) \in Q^0_\gamma$ ($\varphi(x) = \vartheta''(x)$) тогда и только тогда, когда интегро-дифференциальное уравнение

$$A\vartheta + D\vartheta = f(x) \quad (3)$$

имеет решение $\vartheta(x) \in Q^2_{\gamma+2}$, где

$$(A\vartheta)(x) = C_0 x^3 \vartheta^{(2)}(x) + C_1 x^2 \vartheta'(x) + C_2 x \vartheta(x) + C_3 \int_0^x \vartheta(t) dt, \quad (4)$$

$$(D\vartheta)(x) = [K(x, x) - C_0 x^3] \vartheta^{(2)}(x) + [-K'_t(x, x) - C_1 x^2] \vartheta'(x) +$$

$$+ [K''_{tt}(x, x) - C_2 x] \vartheta(x) + \int_0^x [-K^{(3)}_{t^3}(x, t) - C_3] \vartheta(t) dt. \quad (5)$$

Доказательство леммы можно провести, интегрируя по частям $\int_0^x K(x, t) \vartheta''(t) dt$.

Действительно,

$$\int_0^x K(x, t) \vartheta^{(3)}(t) dt = K(x, t) \vartheta^{(2)}(t) \Big|_0^x - \int_0^x K'_t(x, t) \vartheta^{(2)}(t) dt =$$

$$= K(x, x) \vartheta^{(2)}(x) - K'_t(x, t) \vartheta^{(1)}(t) \Big|_0^x + \int_0^x K''_{tt}(x, t) \vartheta'(t) dt =$$

$$= K(x, x) \vartheta^{(2)}(x) - K'_t(x, x) \vartheta'(x) + K''_{tt}(x, x) \vartheta(x) - \int_0^x K^{(3)}_{t^3}(x, t) \vartheta(t) dt =$$

$$= [K(x, x) - C_0 x^3] \vartheta^{(2)}(x) + [-K'_t(x, x) - C_1 x^2] \vartheta'(x) +$$

$$\begin{aligned}
& + [K''_{tt}(x, x) - C_2 x] \vartheta(x) + \int_0^x [-K^{(3)}_{t^3}(x, t) - C_3] \vartheta(t) dt + \\
& + C_0 x^3 \vartheta^{(2)}(x) + C_1 x^2 \vartheta'(x) + C_2 x \vartheta(x) + C_3 \int_0^x \vartheta(t) dt = \\
& = (A\vartheta)(x) + (D\vartheta)(x), \quad \vartheta(x) \in Q^2_{\gamma+2}.
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть операторный пучок

$$P(\alpha) = C_0(\alpha + 3)(\alpha + 2) + C_1(\alpha + 3) + C_2 + C_3 \frac{1}{\alpha + 4}$$

имеет характеристическое число $\alpha > -1$, которому соответствует собственный вектор u_0 и цепочка присоединенных векторов u_i ($i = 1, \dots, m$). Тогда для уравнения $A\vartheta = 0$ существует $m + 1$ линейно независимых решений, принадлежащих пространству $Q^3_{\gamma+3}$, где $\gamma \geq \alpha$. Они будут иметь вид

$$\vartheta_e(x) = x^{\alpha+3}(a_0 + a_1 \ln x + \dots + a_e \ln^e x), \quad e = 0, \dots, m. \quad (6)$$

Доказательство. Найдем $\vartheta'_e(x)$, $\vartheta''_e(x)$.

$$\begin{aligned}
\vartheta'(x) &= (\alpha + 3)x^{\alpha+2}(a_0 + a_1 \ln x + a_2 \ln^2 x + \dots + a_e \ln^e x) + \\
&+ x^{\alpha+2}(a_1 + 2a_2 \ln x + 3a_3 \ln^2 x + \dots + e \ln^{e-1} x), \\
\vartheta''(x) &= (\alpha + 3)(\alpha + 2)x^{\alpha+1}(a_0 + a_1 \ln x + a_2 \ln^2 x + \dots + a_e \ln^e x) + \\
&+ [(\alpha + 2) + (\alpha + 3)]x^{\alpha+1}(a_1 + 2a_2 \ln x + 3a_3 \ln^2 x + \dots + e \ln^{e-1} x) + \\
&+ x^{\alpha+1}(2a_2 + 6a_3 \ln x + 12a_4 \ln^2 x + \dots + e(e - 1) \ln^{e-2} x).
\end{aligned}$$

Подставляя $\vartheta_e(x)$, $\vartheta'_e(x)$, $\vartheta''_e(x)$ в уравнение $A\vartheta = 0$, получаем

$$\begin{aligned}
& C_0 x^3 \{ (\alpha + 3)(\alpha + 2)x^{\alpha+1}(a_0 + a_1 \ln x + a_2 \ln^2 x + \dots + a_e \ln^e x) + \\
& + [(\alpha + 2) + (\alpha + 3)]x^{\alpha+1}(a_1 + 2a_2 \ln x + 3a_3 \ln^2 x + \dots + e a_e \ln^{e-1} x) + \\
& + x^{\alpha+1}(2a_2 + 6a_3 \ln x + 12a_4 \ln^2 x + \dots + e(e - 1)a_e \ln^{e-2} x) \} + \\
& + C_1 x^2 [(\alpha + 3)x^{\alpha+2}(a_0 + a_1 \ln x + a_2 \ln^2 x + \dots + a_e \ln^e x) + \\
& + x^{\alpha+2}(a_1 + 2a_2 \ln x + 3a_3 \ln^2 x + \dots + e a_e \ln^{e-1} x)] +
\end{aligned}$$

$$+C_2 x^{\alpha+4}(a_0 + a_1 \ln x + a_2 \ln^2 x + \dots + a_e \ln^e x) + \\ +C_3 \left[a_0 \frac{x^{\alpha+4}}{\alpha+4} + \sum_{p=1}^e a_p \sum_{k=0}^p (-1)^K \frac{p!}{(p-k)!} \frac{x^{\alpha+4}}{(\alpha+4)^{K+1}} \ln^{p-k} x \right] = 0.$$

Приравнявая коэффициенты при $x^{\alpha+4} \ln^k x$ ($k = e, e-1, \dots, 0$), получаем следующую систему уравнений

$$1) k = e$$

$$\left(C_0(\alpha+3)(\alpha+2) + C_1(\alpha+3) + C_2 + C_3 \frac{1}{\alpha+4} \right) a_e = 0,$$

$$P(\alpha) a_e = 0$$

$$2) k = e-1$$

$$C_0[(\alpha+3)(\alpha+2)a_{e-1} + [(\alpha+2) + (\alpha+3)]ea_e] + \\ + C_1[(\alpha+3)a_{e-1} + ea_e] + C_2 a_{e-1} - C_3 e \frac{1}{(\alpha+4)^2} a_e + C_3 \frac{1}{\alpha+4} a_{e-1} = 0$$

или

$$\left[C_0(\alpha+3)(\alpha+2) + C_1(\alpha+3) + C_2 + \frac{1}{\alpha+4} C_3 \right] a_{e-1} + \\ + [C_0[(\alpha+2) + (\alpha+3)]e + C_1 e - C_3 e \frac{1}{(\alpha+4)^2}] a_e = 0$$

или

$$P(\alpha) a_{e-1} + P'(\alpha) e a_e = 0$$

$$3) k = e-2$$

$$C_0[(\alpha+3)(\alpha+2)a_{e-2} + [(\alpha+2) + (\alpha+3)](e-1)a_{e-1} + \\ + (e-1)ea_e] + C_1[(\alpha+3)a_{e-2} + (e-1)a_{e-1}] + C_2 a_{e-2} + \\ + C_3 [a_e e(e-1) \frac{1}{(\alpha+4)^3} - a_{e-1}(e-1) \frac{1}{(\alpha+4)^2} + a_{e-2} \frac{1}{\alpha+4}] = 0$$

или

$$(C_0(\alpha+3)(\alpha+2) + C_1(\alpha+3) + C_2 + \frac{1}{\alpha+4} C_3) a_{e-2} + \\ + \{C_0[(\alpha+2) + (\alpha+3)](e-1) + C_1(e-1) -$$

$$-C_3(e-1)\frac{1}{(\alpha+4)^2}\}a_{e-1} +$$

$$+[C_0e(e-1) + C_3e(e-1)\frac{1}{(\alpha+4)^3}]a_{e-2} = 0$$

или

$$P(\alpha)a_{e-2} + (e-1)P'(\alpha)a_{e-1} + \frac{e(e-1)}{2}P''(\alpha)a_e = 0$$

$$4) k = e - 3$$

$$\left[C_0[(\alpha+3)(\alpha+2)] + C_1(\alpha+3) + C_2 + C_3\frac{1}{\alpha+4} \right] a_{e-3} +$$

$$+\{C_0[(\alpha+2) + (\alpha+3)](e-2) + C_1(e-2) -$$

$$-C_3(e-2)\frac{1}{(\alpha+4)^2}\}a_{e-2} +$$

$$+\left\{ C_0(e-1)(e-2) + C_3(e-1)(e-2)\frac{1}{(\alpha+4)^3} \right\} a_{e-1} -$$

$$-C_3e(e-1)(e-2)\frac{1}{(\alpha+4)^4}a_e = 0$$

или

$$P(\alpha)a_{e-3} + (e-2)P'(\alpha)a_{e-2} + \frac{e(e-1)}{2}P''(\alpha)a_{e-1} +$$

$$+\frac{e(e-1)(e-2)}{6}P'''(\alpha)a_e = 0$$

$$5) k = e - z \quad (z = 4, 5, \dots, e)$$

$$C_0[(\alpha+3)(\alpha+2)a_{e-z} + [(\alpha+2) + (\alpha+3)](e-z+1)a_{e-z+1} +$$

$$+(e-z+2)(e-z+1)a_{e-z+2}] +$$

$$+C_1[(\alpha+3)a_{e-z} + (e-z+1)a_{e-z+1}] + C_2a_{e-z} +$$

$$+C_3[a_{e-z}\frac{1}{\alpha+4} - a_{e-z+1}(e-z+1)\frac{1}{(\alpha+4)^2} +$$

$$+a_{e-z+2}(e-z+1)(e-z+2)\frac{1}{(\alpha+4)^3} -$$

$$-a_{e-z+3}(e-z+1)(e-z+2)(e-z+3)\frac{1}{(\alpha+4)^4} + \dots +$$

$$+(-1)^{z-1}a_{e-1}(e-z+1) \cdot \dots \cdot (e-1) \frac{1}{(\alpha+4)^z} +$$

$$+(-1)^2 a_e (e-z+1) \cdot \dots \cdot e \frac{1}{(\alpha+4)^{z+1}}] = 0$$

или

$$P(\alpha)a_{e-z} + (e-z+1)P'(\alpha)a_{e-z+1} + \frac{(e-z+1)(e-z+2)}{2!}P''(\alpha)a_{e-z+2} +$$

$$+ \frac{(e-z+1)(e-z+2)(e-z+3)}{3!}P'''(\alpha)a_{e-z+3} + \dots +$$

$$+ \frac{(e-z+1) \cdot \dots \cdot (e-1)}{(z-1)!}a_{e-1} + \frac{(e-z+1) \cdot \dots \cdot e}{z!}a_e = 0.$$

Получили следующую систему уравнений

$$1) P(\alpha)a_e = 0$$

$$2) P(\alpha)a_{e-1} + P'(\alpha)a_e = 0$$

$$3) P(\alpha)a_{e-2} + (e-1)P'(\alpha)a_{e-1} + \frac{e(e-1)}{2}P''(\alpha)a_e = 0$$

$$4) P(\alpha)a_{e-3} + (e-2)P'(\alpha)a_{e-2} + \frac{(e-2)(e-1)}{2}P''(\alpha)a_{e-1} +$$

$$+ \frac{e(e-1)(e-2)}{6}P'''(\alpha)a_e = 0$$

$$5) P(\alpha)a_{e-z} + (e-z+1)a_{e-z+1} + \frac{(e-z+1)(e-z+2)}{2}P''(\alpha)a_{e-z+2} +$$

$$+ \frac{(e-z+1)(e-z+2)(e-z+3)}{6}P'''(\alpha)a_{e-z+3} + \dots + \frac{(e-z+1) \cdot \dots \cdot (e-1)}{(z-1)!}P^{(z-1)}a_{e-1} +$$

$$+ \frac{(e-z+1) \cdot \dots \cdot e}{z!}P^{(z)}a_e = 0.$$

Решая последовательно данную систему уравнений, получаем

$$1) a_e = u_0;$$

$$2) P(\alpha)a_{e-1} + eP'(\alpha)u_0 = 0, \quad a_{e-1} = eu_1;$$

$$3) P(\alpha)a_{e-2} + e(e-1)P'(\alpha)u_1 + \frac{e(e-1)}{2}P''(\alpha)u_0 = 0,$$

$$a_{e-2} = e(e-1)u_2;$$

$$4) P(\alpha)a_{e-3} + (e-2)(e-1)eP'(\alpha)u_2 + \frac{(e-2)(e-1)e}{2}P''(\alpha)u_1 +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{e(e-1)(e-2)}{6} P'''(\alpha) u_0 = 0, \quad a_{e-3} = e(e-1)(e-2) u_3; \\
& 5) P(\alpha) a_{e-z} + e(e-1) \cdot \dots \cdot (e-z+1) P'(\alpha) u_{z-1} + \\
& + e(e-1) \cdot \dots \cdot (e-z+1) \frac{P''(\alpha)}{2} u_{z-2} + \\
& + e(e-1) \cdot \dots \cdot (e-z+1) \frac{P'''(\alpha)}{3!} u_{z-3} + \dots + \\
& + e(e-1) \cdot \dots \cdot (e-z+1) \frac{P^{(z-1)}(\alpha)}{(z-1)!} u_1 + \\
& + e(e-1) \cdot \dots \cdot (e-z+1) \frac{P^{(z)}(\alpha)}{z!} u_0 = 0, \\
& a_{e-2} = e(e-1) \cdot \dots \cdot (e-z+1) u_z = \frac{e!}{(e-z)!} u_z.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$a_{e-2} = \frac{e!}{(e-z)!} u_z \quad (z = 0, 1, 2, \dots, e).$$

Лемма доказана.

Лемма 3. Операторы A и D действуют из $Q_{\gamma+3}^3$ в $Q_{\gamma+4}^1$, причем для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое что $\|D\|_{Q_{\gamma+3}^3 \rightarrow Q_{\gamma+4}^1} < \varepsilon$ при $0 \leq x \leq \delta$.

Действительно, если $\vartheta(x) \in Q_{\gamma+3}^3$, то $\vartheta'(x) \in Q_{\gamma+2}^2$, $\vartheta''(x) \in Q_{\gamma+1}^1$,
 $x^3 \vartheta''(x) \in Q_{\gamma+4}^1$, $x^2 \vartheta'(x) \in Q_{\gamma+4}^2 \in Q_{\gamma+4}^1$, $x \vartheta(x) \in Q_{\gamma+4}^3 \in Q_{\gamma+4}^1$,
 $\int_0^x \vartheta(t) dt \in Q_{\gamma+4}^4 \in Q_{\gamma+4}^1$.

Таким образом $A\vartheta \in Q_{\gamma+4}^1$, $D\vartheta \in Q_{\gamma+4}^1$. Нетрудно оценить норму оператора D , $\|D\|_{Q_{\gamma+3}^3 \rightarrow Q_{\gamma+4}^1} < \varepsilon$ при достаточно малых x ($0 \leq x \leq \delta$).

Лемма 4. При любой $f(x) \in Q_{\gamma+4}^1$ уравнение $A\vartheta = f$ имеет частное решение $\vartheta \in Q_{\gamma+3}^3$, удовлетворяющее условию $\|\vartheta\|_{Q_{\gamma+3}^3} \leq C \|f\|_{Q_{\gamma+4}^1}$.

Доказательство. Введем новые функции $\int_0^x \vartheta(t) dt = w_1(x)$,
 $x \vartheta(x) = w_2(x)$, $x^2 \vartheta' = w_3(x)$, тогда уравнение $A\vartheta = f$ сведется к следующей системе уравнений

$$\begin{cases} xw'_1 = w_2 \\ xw'_2 = w_2 + w_3 \\ xw'_3 = -C_0^{-1}C_3w_1 - C_0^{-1}C_2w_2 + (2I - C_0^{-1}C_1)w_3 + C^{-1}f \end{cases}$$

или

$$xw' + Bw = \bar{f}(x), \quad (7)$$

где

$$w(x) = \begin{pmatrix} w_1(x) \\ w_2(x) \\ w_3(x) \end{pmatrix}, \quad B_{E \times E \rightarrow E \times E} = \begin{pmatrix} 0 & -I & 0 \\ 0 & -I & -I \\ C_0^{-1}C_3 & C_0^{-1}C_2 & C_0^{-1}C_1 - 2I \end{pmatrix},$$

$$\bar{f}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ C_0^{-1}f(x) \end{pmatrix}.$$

Значения $\bar{f}(x)$ принадлежат пространству $E \times E$.

Разрешающий оператор уравнения $xw' + Bw = 0$ имеет вид $U(x, s) = e^{(\int_x^s \frac{dt}{t} B)}$. Если спектр оператора B лежит в левой полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda \leq \gamma^* < 0$, то справедлива оценка $\|U(x, s)\| \leq Ne^{-\bar{\gamma} \int_x^s \frac{dt}{t}}$, $0 \leq x \leq s \leq \delta$, $\gamma^* < -\bar{\gamma} < 0$, $N > 0$.

Рассмотрим операторные уравнения

$$\begin{cases} (B - \lambda I)e = 0 & \text{или} \\ -\lambda e_1 - e_2 = 0 \\ -(1 + \lambda)e_2 - e_3 = 0 \\ C_0^{-1}C_3e_1 + C_0^{-1}C_2e_2 + (C_0^{-1}C_1 - (2 + \lambda)I)e_3 = 0 \end{cases}$$

Преобразовывая эту систему уравнений, получаем

$$\left(C_0^{-1}C_3 \frac{1}{\lambda(\lambda+1)} - C_0^{-1}C_2 \frac{1}{1+\lambda} + (C_0^{-1}C_1 - (2 + \lambda)I) \right) e_3 = 0,$$

$$\left(C_3 \frac{1}{\lambda(\lambda+1)} - C_2 \frac{1}{1+\lambda} + C_1 - C_0(2 + \lambda) \right) e_3 = 0,$$

$$\left(C_3 \left(-\frac{1}{\lambda} \right) + C_2 - C_1(1 + \lambda) + (1 + \lambda)(2 + \lambda)C_0 \right) e_3 = 0.$$

Сделаем замену $-\lambda = \alpha + 4$, тогда получим

$$\left[\frac{1}{\alpha+4} C_3 + C_2 + C_1(\alpha + 3) + (\alpha + 3)(\alpha + 2)C_0 \right] e_3 = 0.$$

Следовательно, $P(\alpha)e_3 = 0$.

Нетрудно заметить, что если $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ ($-1 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_m$) являются характеристическими числами для операторного пучка $P(\alpha)$, тогда $\lambda_1 = -(\alpha_1 + 4)$, $\lambda_2 = -(\alpha_2 + 4), \dots, \lambda_m = -(\alpha_m + 4)$ ($\lambda_m < \lambda_{m-1} < \dots < \lambda_1 < -3$) составляют спектр оператора B . В нашем случае $\gamma^* \leq -3$, $0 > -\bar{\gamma} > \gamma^*$, N не зависит от x и s .

Следовательно, для разрешающего оператора $U(x, s)$ будет справедлива вышеуказанная оценка.

Нетрудно доказать, что для решения уравнения $Aw = f$ вида

$$w(x) = \int_0^x U(x, s) \bar{f}(s) ds = \int_0^x e^{\int_x^s B} \bar{f}(s) \frac{ds}{s} \quad (8)$$

справедлива оценка

$$\|w\|_{Q_{\gamma+3}^3} \leq C \|f\|_{Q_{\gamma+4}^1}.$$

Теорема. Пусть порядок интегрального оператора $K\varphi = \int_0^x K(x, t)\varphi(t)dx$ равен 3, $K(x, t)$ удовлетворяет дополнительному условию $C_0 = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{K(x, x)}{x^3}$, $C_1 = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{-K'_t(x, x)}{x^2}$, $C_2 = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{K''_{tt}(x, x)}{x}$, $C_3 = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{-K^{(3)}_{t^3}(x, x)}{x^0}$, причем C_0 имеет ограниченный обратный, операторный пучок $P(\alpha) = C_0(\alpha + 3)(\alpha + 2) + C_1(\alpha + 3) + C_2 + C_3 \frac{1}{\alpha + 4}$ удовлетворяет условию Леммы 2, $f(x)$ принадлежит пространству $Q_{\gamma+4}^1$. Тогда при γ , удовлетворяющем условию $-\bar{\gamma} < -(\gamma + 4)$ существует такое $\delta > 0$, что при $0 \leq x \leq \delta$ уравнение (1) имеет многопараметрическое семейство решений в пространстве Q_γ^0

$$\varphi(x) = z^{(3)}(x) = [\bar{z}(x) + z_0(x)]^{(3)},$$

где $\bar{z}(x)$ — частное решение уравнения $A\bar{z} + D\bar{z} = f$, $z_0(x)$ — общее решение соответствующего однородного уравнения.

Список литературы

1. Сапронов И.В. Интегральное уравнение Вольтерра в банаховом пространстве // Моделирование систем и процессов. 2023. Т. 16. №3. С. 105-114.
2. Сапронов И.В. Многопараметрическое семейство решений линейного интегрального уравнения Вольтерра I рода // Известия вузов. Математика. 2024. №5. С. 47-62.
3. Магницкий Н. А. Линейные интегральные уравнения Вольтерра I и III рода // Журнал выч. мат. и мат. физ. 1979. Т. 19. № 4. С. 970-988.
4. Магницкий Н.А. Многопараметрические семейства решений интегральных уравнений Вольтерра // ДАН СССР. 1978. Т. 240. № 2. С. 268-271.
5. Магницкий Н.А. О существовании многопараметрических семейств решений интегрального уравнения Вольтерра I-го рода // ДАН СССР. 1977. Т. 235. № 4. С. 772-774.
6. Крейн С.Г., Сапронов И.В. О полноте системы решений интегрального уравнения Вольтерра с особенностью // Докл. РАН. 1997. Т. 355. № 4. С. 450-452.
7. Крейн С.Г., Сапронов И.В. Об интегральных уравнениях Вольтерра с особенностями // УМН. 1995. Т. 50. Вып. 4. С. 140.
8. Krein S.G. Singular integral Volterra equations // Abstracts. International Congress of Mathematics. Zurich. 3-11 August. 1994. P. 125.
9. Krein S.G., Saponov I.V. One class of solutions of Volterra equation with regular singularity // Укр. мат. ж. 1997. Т. 49. № 3. С. 424-432.
10. Сапронов И.В. Об одном классе решений уравнения Вольтерра II рода с регулярной особенностью в банаховом пространстве // Известия высших учебных заведений. Математика. 2004. № 6. С. 48-58.
11. Сапронов И.В. Многопараметрическое семейство решений интегрального уравнения Вольтерра с особенностью в банаховом пространстве // Известия высших учебных заведений. Математика. 2005. № 2. С. 81-83.

12. Сапронов И.В. Уравнение Вольтерра с особенностью в банаховом пространстве // Известия высших учебных заведений. Математика. 2007. № 11. С. 45-55.

13. Сапронов И.В. Многопараметрическое семейство решений интегрального уравнения Вольтерра с особенностью в банаховом пространстве // Известия высших учебных заведений. Математика. 2011. № 1. С. 59-71.

14. Глушко В.П. Линейные вырождающиеся дифференциальные уравнения // ВГУ. 1972.

15. Сапронов И.В. Линейное интегральное уравнение Вольтерра I рода, Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. (1), 87-96 (2022).

References

1. Sapronov I.V. Volterra integral equation in a Banach space // Modeling of systems and processes. 2023. V. 16. No. 3. P. 105-114.

2. Sapronov I.V. A multi-parameter family of solutions to the linear Volterra integral equation of the first kind // Izvestiya vuzov. Mathematics. 2024. No. 5. Pp. 47-62.

3. Magnitsky N.A. Linear integral Volterra equations of the I and III kind // Journal of vych. mat. and mat. phys. 1979. T. 19. No. 4. C. 970-988.

4. Magnitsky N.A. Multiparametric families of solutions of Volterra integral equations // DAN USSR. 1978. T. 240. No. 2. C. 268-271.

5. Magnitsky N.A. On the existence of multiparametric families of solutions of the Volterra integral equation of the I-th kind // DAN USSR. 1977. T. 235. No. 4. C. 772-774.

6. Krein S.G., Sapronov I.V. On the completeness of the system of solutions of the Volterra integral equation with singularity // Dokl. RAS. 1997. T. 355. No. 4. C. 450-452.

7. Krein S.G., Saprnov I.V. On Volterra integral equations with singularities // UMN. 1995. T. 50. Issue. 4. C. 140.
8. Krein S.G. Singular integral Volterra equations // Abstracts. International Congress of Mathematics. Zurich. 3-11 August. 1994. P. 125.
9. Krein S.G., Saprnov I.V. One class of solutions of Volterra equation with regular singularity // Ukr. mat. zh. 1997. T. 49. No. 3. pp. 424-432.
10. Saprnov I.V. On one class of solutions of the Volterra equation of the second kind with a regular singularity in a Banach space // Izvestiya vysshikh uchebnykh uchebnykh. Mathematics. 2004. No. 6. pp. 48-58.
11. Saprnov I.V. A multiparametric family of solutions of the Volterra integral equation with a singularity in a Banach space // Izvestiya vysshikh uchebnykh uchebnykh. Mathematics. 2005. No. 2. pp. 81-83.
12. Saprnov I.V. Volterra equation with a singularity in a Banach space // Izvestiya vysshikh uchebnykh institutov. Mathematics. 2007. No. 11. pp. 45-55.
13. Saprnov I.V. A multiparametric family of solutions of the Volterra integral equation with a singularity in a Banach space // Izvestiya vysshikh uchebnykh uchebnykh. Mathematics. 2011. No. 1. pp. 59-71.
14. Glushko V.P. Linear degenerate differential equations // VSU. 1972.
15. Saprnov I.V. Linear Volterra Integral Equation of the First Kind, Vestnik VGU. Series: Physics. Mathematics. (1), 87-96 (2022).