

DOI: 10.58168/OpEq2025_191-196

УДК 517.5

**СВОЙСТВА СМЕШАННЫХ МОДУЛЕЙ ГЛАДКОСТИ ФУНКЦИЙ
С МОНОТОННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ФУРЬЕ**

**PROPERTIES OF MIXED MODULI OF SMOOTHNESS OF FUNCTIONS
WITH MONOTONE FOURIER COEFFICIENTS**

Симонов Алексей Борисович

кандидат экономических наук, доцент,

доцент кафедры информационных систем в экономике

ВолгГТУ, г. Волгоград, Россия

Симонов Борис Витальевич

кандидат физико-математических наук, доцент,

доцент кафедры прикладной математики

ВолгГТУ, г. Волгоград, Россия

Simonov Alexey Borisovich

Candidate of Economic Sciences, Docent, Docent of the Department of
Information Systems in Economics, Volgograd State Technical University,
Volgograd, Russia

Simonov Boris Vital'evich

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Docent, Docent of the
Department of Applied Mathematics, Volgograd State Technical University,
Volgograd, Russia

Аннотация. В работе изучаются взаимосвязи между смешанными модулями гладкости в разных метриках функций с монотонными коэффициентами Фурье.

Abstract. Relations for mixed moduli of smoothness in various metrics for functions with monotone Fourier coefficients are studied in the paper.

Ключевые слова: метрика, смешанный модуль гладкости, монотонные коэффициенты Фурье.

Keywords: metric, mixed moduli of smoothness, monotone Fourier coefficients.

В работе [1] Коляда В.И. доказал неравенство, уточняющее известное неравенство Ульянова П.Л. [2,3]. В работе [4] получено аналогичное неравенство между смешанными модулями гладкости для функций с лакунарными коэффициентами Фурье. В настоящей работе изучается взаимосвязь между смешанными модулями гладкости для функций с монотонными коэффициентами Фурье.

Введем следующие обозначения: $L_p, 1 < p < \infty$, – множество измеримых функций двух переменных $f(x_1, x_2)$, 2π – периодических по каждому переменному, для которых $\|f\|_p = \left(\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x_1, x_2)|^p dx_1 dx_2 \right)^{1/p} < \infty$;

L_p^0 – множество функций $f \in L_p$ таких, что $\int_0^{2\pi} f(x_1, x_2) dx_2 = 0$ для почти всех x_1 и $\int_0^{2\pi} f(x_1, x_2) dx_1 = 0$ для почти всех x_2 ;

через $\sigma(f)$ будем обозначать ряд Фурье функции $f(x_1, x_2)$, т.е.

$$\sigma(f) \equiv \sigma(f, x_1, x_2) \equiv \sum_{n_2=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{\infty} (a_{n_1 n_2} \cos n_1 x_1 \cos n_2 x_2 + b_{n_1 n_2} \sin n_1 x_1 \cos n_2 x_2 + c_{n_1 n_2} \cos n_1 x_1 \sin n_2 x_2 + d_{n_1 n_2} \sin n_1 x_1 \sin n_2 x_2),$$

где для краткости обозначено $\cos(0 \cdot t) = \frac{1}{2}$,

$$a_{n_1 n_2} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x_1, x_2) \cos n_1 x_1 \cos n_2 x_2 dx_1 dx_2, \quad b_{n_1 n_2} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x_1, x_2) \sin n_1 x_1 \cos n_2 x_2 dx_1 dx_2,$$

$$c_{n_1 n_2} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x_1, x_2) \cos n_1 x_1 \sin n_2 x_2 dx_1 dx_2, \quad d_{n_1 n_2} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x_1, x_2) \sin n_1 x_1 \sin n_2 x_2 dx_1 dx_2 -$$

коэффициенты Фурье функции $f \in L_p$.

Для функции $f \in L_p$ определим разности с шагами h_1 и h_2 положительных порядков α_1 и α_2 соответственно по переменным x_1 и x_2 следующим образом:

$$\Delta_{h_1}^{\alpha_1}(f) = \sum_{n_1=0}^{\infty} (-1)^{n_1} \binom{\alpha_1}{n_1} f(x_1 + (\alpha_1 - n_1)h_1, x_2), \quad \Delta_{h_2}^{\alpha_2}(f) = \sum_{n_2=0}^{\infty} (-1)^{n_2} \binom{\alpha_2}{n_2} f(x_1, x_2 + (\alpha_2 - n_2)h_2),$$

где $\binom{\alpha}{n} = 1$ для $n = 0$, $\binom{\alpha}{n} = \alpha$ для $n = 1$, $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$ для $n \geq 2$.

Обозначим через $\omega_{\alpha_1, \alpha_2}(f, \delta_1, \delta_2)_p$ смешанный модуль гладкости функции $f \in L_p$ положительных порядков α_1 и α_2 соответственно по переменным x_1 и x_2 , т.е.

$$\omega_{\alpha_1, \alpha_2}(f, \delta_1, \delta_2)_p = \sup_{|h_i| \leq \delta_i, i=1,2} \left\| \Delta_{h_1}^{\alpha_1} (\Delta_{h_2}^{\alpha_2}(f)) \right\|_p.$$

Пусть дана последовательность чисел $\{a_{n_i n_j}\} = \{a_{n_i n_j}\}_{n_i=1(i=1,2)}^{\infty}$. Определим разности

$$\begin{aligned} \Delta_{10} a_{n_1 n_2} &= a_{n_1 n_2} - a_{n_1+1 n_2}, \quad \Delta_{01} a_{n_1 n_2} = a_{n_1 n_2} - a_{n_1 n_2+1}, \\ \Delta_{11} a_{n_1 n_2} &= \Delta_{10} (\Delta_{01} a_{n_1 n_2}) = a_{n_1 n_2} - a_{n_1+1 n_2} - a_{n_1 n_2+1} + a_{n_1+1 n_2+1}. \end{aligned}$$

Будем говорить, что последовательность $\{a_{n_i n_j}\}$ монотонна и писать $\{a_{n_i n_j}\} \in M$, если числа $a_{n_i n_j}$ удовлетворяют условиям: $a_{n_i n_j} \rightarrow 0$ при $n_1 \rightarrow \infty$ и любом фиксированном n_2 , $a_{n_i n_j} \rightarrow 0$ при $n_2 \rightarrow \infty$ и любом фиксированном n_1

(1) и $\Delta_{11} a_{n_i n_j} \geq 0$ для любых натуральных чисел n_1 и n_2 .

(2)

Отметим, что из справедливости условий (1) и (2) следует, что

$\Delta_{10} a_{n_i n_j} \geq 0$ и $\Delta_{01} a_{n_i n_j} \geq 0$, $a_{n_i m_1} \geq a_{n_2 m_1}$ для $n_1 \leq n_2$ и $a_{n_1 m_1} \geq a_{n_1 m_2}$ для $m_1 \leq m_2$, $a_{n_i n_j} \geq 0$ для всех $n_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2$.

Будем писать, что $f \in M_p$, если

1) $f \in L_p^0$,

2) функция $f(x_1, x_2)$ имеет ряд Фурье

$$\sigma(f) \equiv \sum_{n_2=1}^{\infty} \sum_{n_1=1}^{\infty} a_{n_1 n_2} \psi_1(n_1 x_1) \psi_2(n_2 x_2),$$

где $\psi_i(t)$ есть $\cos t$ или $\sin t$ ($i = 1, 2$),

3) коэффициенты $a_{n_1 n_2}$ удовлетворяют условиям (1) и (2), т.е. $\{a_{n_1 n_2}\} \in M$.

Заметим, что для $f \in L_p^0$ условие (1) выполнено.

Будем писать, что $f \in \Lambda_p$, если

1) $f \in L_p^0$,

2) функция $f(x_1, x_2)$ имеет ряд Фурье

$$\sigma(f) \equiv \sum_{n_2=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{\infty} a_{n_1 n_2} \psi_1(2^{n_1} x_1) \psi_2(2^{n_2} x_2),$$

где $\psi_i(t)$ есть $\cos t$ или $\sin t$ ($i = 1, 2$).

Для неотрицательных функционалов $F(f, \delta_1, \delta_2)$ и $G(f, \delta_1, \delta_2)$ будем писать, что $F(f, \delta_1, \delta_2) \prec G(f, \delta_1, \delta_2)$, если существует положительная постоянная C , не зависящая от f, δ_1 и δ_2 , такая, что $F(f, \delta_1, \delta_2) \leq C \cdot G(f, \delta_1, \delta_2)$. Если одновременно $F(f, \delta_1, \delta_2) \prec G(f, \delta_1, \delta_2)$ и $G(f, \delta_1, \delta_2) \prec F(f, \delta_1, \delta_2)$, то будем писать $F(f, \delta_1, \delta_2) \approx G(f, \delta_1, \delta_2)$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема. Пусть $f \in M_p$, $1 < p < q < \infty$, $\theta = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$, $\alpha_i > \theta$, $\delta_i \in (0, 1)$, $i = 1, 2$. Тогда,

если

$$\int_0^1 \int_0^1 (t_1^{-\theta} t_2^{-\theta} \omega_{\alpha_1, \alpha_2}(f, t_1, t_2)_p)^q \frac{dt_1}{t_1} \frac{dt_2}{t_2} < \infty,$$

то $f \in L_q^0$ и

$$\delta_1^{\alpha_1 - \theta} \delta_2^{\alpha_2 - \theta} \left(\int_{\delta_2}^1 \int_{\delta_1}^1 t_1^{-p(\alpha_1 - \theta)} t_2^{-p(\alpha_2 - \theta)} \omega_{\alpha_1, \alpha_2}^p(f, t_1, t_2)_q \frac{dt_1}{t_1} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{1/p} \approx \left(\int_0^{\delta_1} \int_0^{\delta_2} t_1^{-q\theta} t_2^{-q\theta} \omega_{\alpha_1, \alpha_2}^q(f, t_1, t_2)_p \frac{dt_1}{t_1} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{1/q}.$$

Аналогичная теорема для функции одного переменного доказана в работе [5]. Неравенство типа Ульянова для смешанных модулей гладкости установлено в работе [6]. Неравенство типа Коляды для полных модулей гладкости (см. [1], [7, 8]). Неравенство типа Ульянова для полных модулей гладкости (см. [9]).

Замечание. В работе [4] для функций с лакунарными коэффициентами, т.е. для $f \in \Lambda_p$, доказано следующее утверждение:

Пусть $f \in \Lambda_p$, $1 < p < q < \infty$, $\theta = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$, $\alpha_i > \theta$, $\delta_i \in (0,1)$, $i = 1,2$. Тогда

$$\delta_1^{\alpha_1-\theta} \delta_2^{\alpha_2-\theta} \left(\int_{\delta_2}^1 \int_{\delta_1}^1 t_1^{-p(\alpha_1-\theta)} t_2^{-p(\alpha_2-\theta)} \omega_{\alpha_1, \alpha_2}^p(f, t_1, t_2)_q \frac{dt_1}{t_1} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{1/p} \prec$$

$$\prec \left(\int_0^{\delta_1} \int_0^{\delta_2} t_1^{-q\theta} t_2^{-q\theta} \omega_{\alpha_1, \alpha_2}^q(f, t_1, t_2)_p \frac{dt_1}{t_1} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{1/q}, \quad (3)$$

причем в соотношении (3) знак $\prec$ нельзя заменить на знак $\approx$.

С другой стороны в теореме для функций из M_p левые и правые части соотношения (3) эквивалентны, т.е. знак $\prec$ заменяется на знак $\approx$.

Список литературы

1. Коляда В. И. О соотношениях между модулями непрерывности в разных метриках / В. И. Коляда // Тр. Матем. ин-та АН СССР. 1988. Т. 181. С. 117-136.
2. Ульянов П. Л. Вложение некоторых классов функций H_p^ω / П. Л. Ульянов // Изв. АН СССР. Сер. Матем. 1968. Т. 32 С. 649-686.
3. Ульянов П. Л. Теоремы вложения и соотношения между наилучшими приближениями (модулями непрерывности) в разных метриках / П.Л. Ульянов // Матем. сб. 1970. Т. 81 (123). № 1 С. 104-131.
4. Потапов М. К. Усиленное неравенство Ульянова для смешанных модулей гладкости функций с лакунарными коэффициентами Фурье / М. К. Потапов, Б. В. Симонов // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2012. № 1 С. 18-24.
5. Potapov M. K. Relations for moduli of smoothness in various metrics: functions with restrictions on the Fourier coefficients / M. K. Potapov, B. V. Simonov and S. Yu. Tikhonov // Jaen Journal on Approximation. 20009. 1(2) С. 205-222.

6. Потапов М. К. Соотношения между модулями гладкости и теоремы вложения классов Никольского / М. К. Потапов, Б. В. Симонов, С. Ю. Тихонов // Тр. МИАН. 2010. Т. 269 С. 204-214.

7. Trebels W. Inequalities for moduli of smoothness versus embeddings of function spaces / W. Trebels // Arch. Math. 2010. 94 С. 155-164.

8. Kolomoitsev Yu. Hardy-Littlewood and Ulyanov inequalities / Yu. Kolomoitsev, S. Tikhonov // Mem. Amer. Soc. 271(1325) (2021), Arxiv: 1711.08163.

9. Потапов М. К. Дробные модули гладкости / М. К. Потапов, Б. В. Симонов., С. Ю. Тихонов // Москва: МАКС Пресс, 2016.

References

1. Kolyada V. I. On the relations between moduli of continuity in various metrics / V. I. Kolyada // Trudy Mat. Inst. Steklov. 1988. T. 181. С. 117–136.

2. Ul'janov P. L. The embedding of certain classes H_p^ω of functions / P. L. Ul'janov // Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 1968. 32 С. 649–686.

3. Ul'janov P. L. Imbedding theorems and relations between best approximations (moduli of continuity) in various metrics / P. L. Ul'janov // Mat. Sb. (N.S.) 1970. 81/123 С. 104–131.

4. Potapov M. K. Improvement of the Ul'yanov inequality for mixed moduli of smoothness for functions with lacunary Fourier coefficients / M. K. Potapov, B. V. Simonov // Vestnik Moskov. Univ. Mat. Mekh. 2012. No. 1 С. 18–24.

5. Potapov M. K. Relations for moduli of smoothness in various metrics: functions with restrictions on the Fourier coefficients / M. K. Potapov, B. V. Simonov and S. Yu. Tikhonov // Jaen Journal on Approximation. 2009. 1(2) С. 205-222.

6. Potapov M. K. Relations between mixed moduli of smoothness and embedding theorems for the Nikol'skiĭ classes / M. K. Potapov, B. V. Simonov, S. Yu. Tikhonov // Tr. Mat. Inst. Steklova. 2010. N. 269. С. 204–214.

7. Trebels W. Inequalities for moduli of smoothness versus embeddings of function spaces / W. Trebels // Arch. Math. 2010. 94 С. 155-164.

8. Kolomoitsev Yu. Hardy-Littlewood and Ulyanov inequalities / Yu. Kolomoitsev, S. Tikhonov // Mem Amer. Soc. 271(1325) (2021), Arxiv: 1711.08163.

9. Potapov M. K. Fractional Moduli of Smoothness / M. K. Potapov, B. V. Simonov, S. Yu. Tikhonov // Moscow: MAKS Press, 2016.