

DOI: 10.58168/OpEq2025_197-205

УДК 517.5

**СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ПОЛНЫМИ МОДУЛЯМИ
ГЛАДКОСТИ В РАЗНЫХ МЕТРИКАХ**
RELATIONS BETWEEN COMPLETE MODULI
OF SMOOTHNESS IN DIFFERENT METRICS

Симонов Борис Витальевич

кандидат физико-математических наук, доцент,

доцент кафедры прикладной математики

ВолгГТУ, г. Волгоград, Россия

Симонова Ирина Эдуардовна

кандидат физико-математических наук, доцент,

доцент кафедры прикладной математики

ВолгГТУ, г. Волгоград, Россия

Simonov Boris Vital'evich

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Docent, Docent of the
Departments of Applied Mathematics, Volgograd State Technical University,
Volgograd, Russia

Simonova Irina Eduardovna

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Docent, Docent of the
Departments of Applied Mathematics, Volgograd State Technical University,
Volgograd, Russia

Аннотация. В статье исследуются функции двух переменных в смешанной метрике. Получены зависимости между полными модулями гладкости функции в одной метрике и полными модулями гладкости исходной функции в другой метрике.

Abstract. Functions of two variables in a mixed metric are investigated in the article. Relationships between the complete moduli of smoothness of the function in one metric and the mixed moduli of smoothness of the original function in another are obtained.

Ключевые слова: смешанная метрика, полный модуль гладкости.

Key words: mixed metric, complete moduli of smoothness.

Введем следующие обозначения: $L_{p_1 p_2}, 1 \leq p_i \leq \infty (i = 1, 2)$ – множество измеримых функций двух переменных $f(x_1, x_2), 2\pi$ – периодических по каждому

переменному, для которых $\|f\|_{p_1 p_2} = \left\| \|f\|_{p_1} \right\|_{p_2} < \infty$, где $\|F\|_{p_i} = \left(\int_0^{2\pi} |F|^{p_i} dx_i \right)^{1/p_i}$, если

$$1 \leq p_i < \infty,$$

$$\|F\|_{p_i} = \sup_{0 \leq x_i \leq 2\pi} |F|, \text{ если } p_i = \infty;$$

$L_{p_1 p_2}^0$ – множество функций $f \in L_{p_1 p_2}$ таких, что $\int_0^{2\pi} f(x_1, x_2) dx_2 = 0$ для почти всех x_1 и

$$\int_0^{2\pi} f(x_1, x_2) dx_1 = 0 \text{ для почти всех } x_2;$$

$\Delta_{h_1, h_2}^\alpha(f)$ – полная разность с шагами h_1 и h_2 положительного порядка α функции

$$f \in L_{p_1 p_2}, \text{ т.е. } \Delta_{h_1, h_2}^\alpha(f) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{\alpha}{n} f(x_1 + (\alpha - n)h_1, x_2 + (\alpha - n)h_2), \text{ где } \binom{\alpha}{n} = 1 \text{ для } n = 0,$$

$$\binom{\alpha}{n} = \alpha \text{ для } n = 1, \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha - 1) \cdots (\alpha - n + 1)}{n!} \text{ для } n \geq 2;$$

$\omega_\alpha(f, \delta)_{p_1 p_2}$ – полный модуль гладкости положительного порядка α функции

$$f \in L_{p_1 p_2}, \text{ т.е. } \omega_\alpha(f, \delta)_{p_1 p_2} = \sup_{|h_i| \leq \delta, i=1,2} \left\| \Delta_{h_1, h_2}^\alpha(f) \right\|_{p_1 p_2};$$

$$q^* = q, \text{ если } q < \infty, q^* = 1, \text{ если } q = \infty.$$

Для неотрицательных функционалов $F(f, \delta_1, \delta_2)$ и $G(f, \delta_1, \delta_2)$ будем писать, что $F(f, \delta_1, \delta_2) \prec G(f, \delta_1, \delta_2)$, если существует положительная постоянная C , не зависящая от f, δ_1 и δ_2 , такая, что $F(f, \delta_1, \delta_2) \leq CG(f, \delta_1, \delta_2)$. Если одновременно $F(f, \delta_1, \delta_2) \prec G(f, \delta_1, \delta_2)$ и $G(f, \delta_1, \delta_2) \prec F(f, \delta_1, \delta_2)$, то будем писать $F(f, \delta_1, \delta_2) \approx G(f, \delta_1, \delta_2)$.

Ранее в работах ([1], [2], [3]) получен ряд соотношений между полными модулями гладкости. Пусть $f \in L_{p_1 p_2}^0$, $\alpha > 0$, $\delta \in (0, 1)$. Тогда

а) при $1 = p_1 = p_2 < q_1 = q_2 = \infty$, $\alpha \in \mathbb{N}$

$$\omega_\alpha(f, \delta)_{\infty, \infty} \prec \int_0^\delta t^{-2} \omega_{\alpha+2}(f, t)_{1,1} \frac{dt}{t},$$

б) при $1 < p_i < q_i < \infty$ ($i = 1, 2$), $q = \min(q_1, q_2)$

$$\omega_\alpha(f, \delta)_{q_1 q_2} \prec \left(\int_0^\delta \left(t^{-\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}\right) - \left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2}\right)} \omega_{\alpha + \frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1} + \frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2}}(f, t)_{p_1, p_2} \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}.$$

В работе [4] приведены более общие соотношения между полными модулями гладкости, из которых следуют перечисленные выше соотношения в пунктах а) и б) при $p_1 = p_2 = p$, $q_1 = q_2 = q$. А именно, имеет место следующая теорема 1.

Теорема 1 ([4], стр. 70). Пусть $f \in L_{pp}$, $1 \leq p < q \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $\alpha > 1 - \frac{1}{q}$, $\gamma \geq 0$, $m \geq 0$,

$\delta \in (0, 1)$. Тогда

$$\omega_\alpha(f, \delta)_{qq} \prec \delta^{-\gamma} \omega_{\alpha+\gamma}(f, \delta)_{pp} \sigma\left(\frac{1}{\delta}\right) + \left(\int_0^\delta \left(t^{-2\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)} \omega_{\alpha+m}(f, t)_{pp} \right)^{q^*} \frac{dt}{t} \right)^{1/q^*}, \quad (1)$$

где

$$\sigma(t) := \begin{cases} 1, & \text{если } \gamma > 2\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right); \\ 1, & \text{если } \gamma = 2\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right), 1 < p < q < \infty; \\ \ln^{\frac{1}{p'}}(t+1), & \text{если } \gamma = 2\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) = \frac{2}{p}, 1 < p < q = \infty; \\ 1, & \text{если } \gamma = 2\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \geq 1, \alpha + \gamma \in \mathbb{N}, 1 = p < q \leq \infty; \\ \ln^{\frac{1}{q^*}}(t+1), & \text{если } \gamma = 2\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \geq 1, \alpha + \gamma \notin \mathbb{N}, 1 = p < q \leq \infty; \\ \ln^{\frac{1}{q}}(t+1), & \text{если } \gamma = 2\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) < 1, 1 = p < q \leq \infty; \\ t^{2\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) - \gamma}, & \text{если } 0 \leq \gamma < 2\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right). \end{cases}$$

Замечание 1 ([4]). Из теоремы 1 при $m = \gamma$ следует неравенство

$$\omega_{\alpha}(f, \delta)_{qq} \prec \left(\int_0^{\delta} \left(t^{-\gamma} \omega_{\alpha+\gamma}(f, t)_{pp} \sigma\left(\frac{1}{t}\right) \right)^{q^*} \frac{dt}{t} \right)^{1/q^*}.$$

В работе [5] утверждения теорема 1 для случаев, когда $\gamma = \frac{2}{p} - \frac{2}{q}, 1 = p < q < \infty$ или $\gamma = \frac{2}{p} - \frac{2}{q}, 1 < p < q = \infty$, были уточнены при помощи интерполяционного метода. А именно, имеет место следующая теорема 2.

Теорема 2 ([5]). Пусть $f \in L_{pp}, \alpha > 0, \delta \in (0, 1)$. Тогда

1) при $1 = p < q < \infty$ справедливо неравенство

$$\omega_{\alpha}(f, \delta)_{qq} \prec \left(\int_0^{\delta \left(\log_2 \frac{2}{\delta} \right)^{\frac{1}{\alpha q}}} \left(t^{-2\left(1 - \frac{1}{q}\right)} \omega_{\alpha+2\left(1 - \frac{1}{q}\right)}(f, t)_{1,1} \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}. \quad (2)$$

2) при $1 < p < q = \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, справедливо неравенство

$$\omega_{\alpha}(f, \delta)_{\infty, \infty} \prec \int_0^{\delta \left(\log_2 \frac{2}{\delta} \right)^{\frac{1}{\alpha p'}}} t^{-\frac{2}{p}} \omega_{\alpha+\frac{2}{p}}(f, t)_{pp} \frac{dt}{t}. \quad (3)$$

В данной работе результаты теорем 1 и 2 уточняются следующим образом.

Теорема 3. Пусть $f \in L_{p_1 p_2}^0$, $1 \leq p_i < q_i \leq \infty$ ($i = 1, 2$), $q = \min(q_1, q_2)$, $q_m = \max(q_1^*, q_2^*)$,

$$\theta = \frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1} + \frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2},$$

$$p_m = \max(p_1, p_2), \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \alpha > 0, m \geq 0, \gamma \geq 0, \psi = \psi(\gamma, p_1, q_1, p_2, q_2) = 1, \quad \text{если } \gamma > \theta, \quad \text{и}$$

$$\psi = \psi(p_1, q_1, p_2, q_2) = 0, \quad \text{если } \gamma \leq \theta, \delta \in (0, 1). \quad \text{Тогда}$$

$$\begin{aligned} \omega_\alpha(f, \delta)_{q_1 q_2} &\prec \delta^\alpha \left(\int_{\delta}^{\delta \left(\sigma_1 \left(\frac{1}{\delta} \right)^{\frac{1}{\alpha + \gamma \cdot \psi}} \right)} \left(t^{-\alpha - \theta} \omega_{\alpha + \gamma}(f, t)_{p_1 p_2} \right)^{q_m} \frac{dt}{t} \right)^{1/q_m} + \\ &+ \left(\delta \left(\sigma_1 \left(\frac{1}{\delta} \right) \right)^{\frac{1 - \psi}{\alpha}} \right)^{-\theta} \omega_{\alpha + \gamma} \left(f, \delta \left(\sigma_1 \left(\frac{1}{\delta} \right) \right)^{\frac{1}{\alpha + \gamma \cdot \psi}} \right)_{p_1 p_2} + \left(\int_0^{\delta} \left(t^{-\theta} \omega_{\alpha + m}(f, t)_{p_1 p_2} \right)^{q_m} \frac{dt}{t} \right)^{1/q_m}. \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\sigma_1(t) := \begin{cases} t^{\gamma - \theta}, & \text{если } \gamma > \theta; \\ 1, & \text{если } \gamma = \theta, 1 < p_i < q_i \ (i = 1, 2); \\ 1, & \text{если } \gamma = \theta, 1 = p_i < q_i = \infty \ (i = 1, 2), \alpha \in \mathbb{N}; \\ 1, & \text{если } \gamma = \theta, 1 = p_1 = p_2 < q_i < \infty \ (i = 1, 2), 2 \leq q, \alpha + \gamma \in \mathbb{N}; \\ \ln^{1/q}(t+1), & \text{если } \gamma = \theta, 1 = p_1 = p_2 < q_i < \infty \ (i = 1, 2), 2 \leq q, \alpha + \gamma \notin \mathbb{N}; \\ \ln^{1/q_m}(t+1), & \text{если } \gamma = \theta, 1 = p_1 = p_2 < q_i < \infty \ (i = 1, 2), 2 > q; \\ \ln^{1/q_m}(t+1), & \text{если } \gamma = \theta, 1 = p_i < q_i = \infty \ (i = 1, 2), \alpha \notin \mathbb{N}; \\ \ln^{1/q_m}(t+1), & \text{если } \gamma = \theta, 1 < p_1 < q_1 \leq \infty, 1 = p_2 < q_2 \leq \infty; \\ \ln^{1/q_m}(t+1), & \text{если } \gamma = \theta, 1 = p_1 < q_1 = \infty, 1 \leq p_2 < q_2 < \infty; \\ \ln^{1/q_m}(t+1), & \text{если } \gamma = \theta, 1 = p_1 < q_1 < \infty, 1 \leq p_2 < q_2 = \infty; \\ \ln^{1/q_m}(t+1), & \text{если } \gamma = \theta, 1 = p_1 < q_1 < \infty, 1 < p_2 < q_2 < \infty; \\ \ln^{1/q_m}(t+1), & \text{если } \gamma = \theta, 1 = p_1 < q_1 = \infty, 1 < p_2 < q_2 = \infty; \\ \ln^{\min(1/p_2, 1/q_1)}(t+1), & \text{если } \gamma = \theta, 1 < p_1 < q_1 < \infty, 1 < p_2 < q_2 = \infty; \\ \ln^{\min(1/p_1, 1/q_2)}(t+1), & \text{если } \gamma = \theta, 1 < p_1 < q_1 = \infty, 1 < p_2 < q_2 < \infty; \\ \ln^{1/p_m}(t+1), & \text{если } \gamma = \theta, 1 < p_1 < q_1 = \infty, 1 < p_2 < q_2 = \infty; \\ 1, & \text{если } 0 \leq \gamma < \theta. \end{cases}$$

Замечание 2. Из теоремы 3 следует неравенство

$$\omega_{\alpha}(f, \delta)_{q_1 q_2} \prec \delta^{-\gamma} \omega_{\alpha+\gamma}(f, \delta)_{p_1 p_2} \sigma_2\left(\frac{1}{\delta}\right) + \left(\int_0^{\delta} \left(t^{-\theta} \omega_{\alpha+m}(f, t)_{p_1 p_2} \right)^{q_m} \frac{dt}{t} \right)^{1/q_m},$$

а при $m = \gamma$

$$\omega_{\alpha}(f, \delta)_{q_1 q_2} \prec \left(\int_0^{\delta} \left(t^{-\gamma} \omega_{\alpha+\gamma}(f, t)_{p_1 p_2} \sigma_2\left(\frac{1}{t}\right) \right)^{q_m} \frac{dt}{t} \right)^{1/q_m},$$

где функция $\sigma_2(t)$ при $\gamma = \theta$ совпадает с $\sigma_1(t)$, а при $\gamma > \theta$ $\sigma_2(t) \equiv 1$, а при $\gamma < \theta$ $\sigma_2(t) = t^{\theta-\gamma}$.

Замечание 4. Из неравенства (4) следуют (1), (2) и (3).

В теореме 3 при изучении соотношений между полными модулями гладкости рассматривается случай, когда метрика изменяется как по одной переменной, так и по второй переменной. В следующих двух теоремах будут рассмотрены случаи, когда по одной из переменных метрика изменяется, а по оставшейся второй переменной – нет.

Для сокращения записи введем следующие обозначения:

$$\sigma_3^{(i,j)}(t) = \begin{cases} t^{\gamma - \left(\frac{i}{p_i} - \frac{1}{q_i}\right)}, & \text{если } \gamma > \frac{1}{p_i} - \frac{1}{q_i}; \\ 1, & \text{если } 0 \leq \gamma < \frac{1}{p_i} - \frac{1}{q_i}; \\ 1, & \text{если } \gamma = \frac{1}{p_i} - \frac{1}{q_i}, 1 = p_i < q_i = \infty, \alpha \in \mathbb{N}; \\ 1, & \text{если } \gamma = \frac{1}{p_i} - \frac{1}{q_i}, 1 < p_i < q_i < \infty, 1 < p_j < \infty; \\ \ln^{1/q_i^*}(t+1), & \text{если } \gamma = \frac{1}{p_i} - \frac{1}{q_i}, 1 = p_i < q_i \leq \infty; \\ \ln^{1/q_i^*}(t+1), & \text{если } \gamma = \frac{1}{p_i} - \frac{1}{q_i}, 1 < p_i < q_i \leq \infty, p_j = 1 \text{ или } p_j = \infty; \\ \ln^{1/p_i}(t+1), & \text{если } \gamma = \frac{1}{p_i} - \frac{1}{q_i}, 1 < p_i < q_i = \infty, 1 < p_j < \infty; \end{cases}$$

$$\sigma_4^{(i,j)}(t) = \sigma_3^{(i,j)}(t), \text{ если } \gamma = \frac{1}{p_i} - \frac{1}{q_i}; \quad \sigma_4^{(i,j)}(t) = t^{\frac{1}{p_i} - \frac{1}{q_i} - \gamma}, \text{ если } 0 \leq \gamma < \frac{1}{p_i} - \frac{1}{q_i};$$

$$\sigma_4^{(i,j)}(t) = 1, \text{ если } \gamma > \frac{1}{p_i} - \frac{1}{q_i}.$$

Теорема 4. Пусть $f \in L_{p_1 p_2}^0$, $1 \leq p_1 < q_1 \leq \infty$, $1 \leq p_2 \leq \infty$, $\theta = \frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}$, $\alpha > 0$, $\gamma \geq 0$, $m \geq 0$,

$\psi = \psi(\gamma, p_1, q_1) = 1$, если $\gamma > \theta$, и $\psi = \psi(\gamma, p_1, q_1) = 0$, если $\gamma \leq \theta$, $\delta \in (0, 1)$. Тогда

$$\begin{aligned} \omega_\alpha(f, \delta)_{q_1 p_2} &\prec \delta^\alpha \left(\int_\delta \left(t^{-\alpha-\theta} \omega_{\alpha+\gamma}(f, t)_{p_1 p_2} \right)^{q_1^*} \frac{dt}{t} \right)^{1/q_1^*} + \\ &+ \left(\delta \left(\sigma_3^{(1,2)} \left(\frac{1}{\delta} \right) \right)^{\frac{1-\psi}{\alpha}} \right)^{-\theta} \omega_{\alpha+\gamma} \left(f, \delta \left(\sigma_3^{(1,2)} \left(\frac{1}{\delta} \right) \right)^{\frac{1}{\alpha+\gamma-\psi}} \right)_{p_1 p_2} + \left(\int_0^\delta \left(t^{-\theta} \omega_{\alpha+m}(f, t)_{p_1 p_2} \right)^{q_1^*} \frac{dt}{t} \right)^{1/q_1^*} \prec \\ &\prec \delta^{-\gamma} \omega_{\alpha+\gamma}(f, \delta)_{p_1 p_2} \sigma_4^{(1,2)} \left(\frac{1}{\delta} \right) + \left(\int_0^\delta \left(t^{-\theta} \omega_{\alpha+m}(f, t)_{p_1 p_2} \right)^{q_1^*} \frac{dt}{t} \right)^{1/q_1^*}. \end{aligned}$$

Замечание 5. Если дополнительно $m = \gamma$, то

$$\omega_\alpha(f, \delta)_{q_1 p_2} \prec \left(\int_0^\delta \left(t^{-\gamma} \omega_{\alpha+\gamma}(f, t)_{p_1 p_2} \sigma_4^{(1,2)} \left(\frac{1}{t} \right) \right)^{q_1^*} \frac{dt}{t} \right)^{1/q_1^*}.$$

Теорема 5. Пусть $f \in L_{p_1 p_2}^0$, $1 \leq p_2 < q_2 \leq \infty$, $1 \leq p_1 \leq \infty$, $\theta = \frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2}$, $\alpha > 0$, $\gamma \geq 0$, $m \geq 0$,

$\psi = \psi(\gamma, p_2, q_2) = 1$, если $\gamma > \theta$, и $\psi = \psi(\gamma, p_2, q_2) = 0$, если $\gamma \leq \theta$, $\delta \in (0, 1)$. Тогда

$$\begin{aligned} \omega_\alpha(f, \delta)_{p_1 q_2} &\prec \delta^\alpha \left(\int_\delta \left(t^{-\alpha-\theta} \omega_{\alpha+\gamma}(f, t)_{p_1 p_2} \right)^{q_2^*} \frac{dt}{t} \right)^{1/q_2^*} + \\ &+ \left(\delta \left(\sigma_3^{(2,1)} \left(\frac{1}{\delta} \right) \right)^{\frac{1-\psi}{\alpha}} \right)^{-\theta} \omega_{\alpha+\gamma} \left(f, \delta \left(\sigma_3^{(2,1)} \left(\frac{1}{\delta} \right) \right)^{\frac{1}{\alpha+\gamma-\psi}} \right)_{p_1 p_2} + \left(\int_0^\delta \left(t^{-\theta} \omega_{\alpha+m}(f, t)_{p_1 p_2} \right)^{q_2^*} \frac{dt}{t} \right)^{1/q_2^*} \prec \\ &\prec \delta^{-\gamma} \omega_{\alpha+\gamma}(f, \delta)_{p_1 p_2} \sigma_4^{(2,1)} \left(\frac{1}{\delta} \right) + \left(\int_0^\delta \left(t^{-\theta} \omega_{\alpha+m}(f, t)_{p_1 p_2} \right)^{q_2^*} \frac{dt}{t} \right)^{1/q_2^*}. \end{aligned}$$

Замечание 6. Если дополнительно $m = \gamma$, то

$$\omega_{\alpha}(f, \delta)_{p_1 q_2} \prec \left(\int_0^{\delta} \left(t^{-\gamma} \omega_{\alpha+\gamma}(f, t)_{p_1 p_2} \sigma_4^{(2,1)} \left(\frac{1}{t} \right) \right)^{q_2^*} \frac{dt}{t} \right)^{1/q_2^*}.$$

Замечание 7. Пусть $2 \leq q_i < \infty$, $\theta_i = 1 - \frac{1}{q_i}$ ($i = 1, 2$), $\alpha > 0$, $\alpha + \theta_1 + \theta_2 \in \mathbb{N}$. Тогда из теоремы 3 следует неравенство

$$\omega_{\alpha}(f, \delta)_{q_1, q_2} \prec \left(\int_0^{\delta} \left(t^{-\theta_1 - \theta_2} \omega_{\alpha + \theta_1 + \theta_2}(f, t)_{1,1} \right)^{q_m} \frac{dt}{t} \right)^{1/q_m}.$$

При $q_1 = q_2 = q$ из этого неравенства следует неравенство из теоремы 1. Для функции одной переменной аналогичное неравенство не имеет места.

Список литературы

1. Потапов М. К. Связь между полными модулями гладкости в метриках L_1 и L_{∞} / М. К. Потапов, Б. В. Симонов // Вестн. Моск. ун-та, сер. 1, Математика. Механика. 2016. № 1 С. 16-24.
2. Потапов М. К. Усиленное неравенство Ульянова для полных модулей гладкости функций из пространств со смешанной метрикой / М.К. Потапов, Б. В. Симонов // Вестн. Моск. ун-та, сер. 1, Математика. Механика. 2018. № 6 С. 8-20.
3. Потапов М. К. Дробные модули гладкости / М. К. Потапов, Б. В. Симонов, С. Ю. Тихонов // Москва: МАКС Пресс, 2016.
4. Kolomoitsev Yu. Hardy-Littlewood and Ulyanov inequalities / Yu. Kolomoitsev, S. Tikhonov // Mem Amer. Soc. 271(1325) (2021), Arxiv: 1711.08163.

5. Domingues O. Embedding of smooth function spaces extrapolations, and related inequalities / O. Domingues, S. Tikhonov // ArXiv: 1909.12818v2 [math.FA] \ 22 \ Nov \ 2019 C. 1-71.

References

1. Potapov M. K. Interrelations between full moduli of smoothness in the metrics of L_1 and L_∞ / M. K. Potapov, B. V. Simonov // Univ. Ser. I Mat. Mekh. 2016. No. 1 C. 15–22.

2. Potapov M. K. Strengthened Ul'yanov's inequality for complete moduli of smoothness of functions from spaces with mixed metrics / M. K. Potapov, B. V. Simonov // Univ. Ser. I Mat. Mekh. 2018. No. 6 C. 8 - 20.

3. Potapov M. K. Fractional Moduli of Smoothness / M. K. Potapov, B. V. Simonov, S. Yu. Tikhonov // Moscow: MAKS Press, 2016.

4. Kolomoitsev Yu. Hardy-Littlewood and Ulyanov inequalities / Yu. Kolomoitsev, S. Tikhonov // Mem Amer. Soc. 271(1325) (2021), Arxiv: 1711.08163.

5. Domingues O. Embedding of smooth function spaces extrapolations, and related inequalities / O. Domingues, S. Tikhonov // ArXiv: 1909.12818v2 [math.FA] \ 22 \ Nov \ 2019 C. 1-71.