

DOI: 10.58168/OpEq2025_206-211

УДК 517.5

**УТОЧНЕНИЕ СООТНОШЕНИЙ МЕЖДУ МОДУЛЯМИ ГЛАДКОСТИ
В РАЗНЫХ МЕТРИКАХ**

**IMPROVEMENT OF INTERRELATIONS BETWEEN MODULI OF
SMOOTHNESS IN DIFFERENT METRICS**

Симонова Ирина Эдуардовна

кандидат физико-математических наук, доцент,
доцент кафедры прикладной математики, ВолгГТУ, г. Волгоград, Россия

Иголина Татьяна Романовна

кандидат физико-математических наук, доцент,
доцент кафедры высшей математики ИИИ, РТУ МИРЭА, г. Москва, Россия

Симонов Борис Витальевич

кандидат физико-математических наук, доцент,
доцент кафедры прикладной математики, ВолгГТУ, г. Волгоград, Россия

Simonova Irina Eduardovna

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Docent, Docent of the
Departments of Applied Mathematics, Volgograd State Technical University,
Volgograd, Russia

Igonina Tatyana Romanovna

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Docent, Docent of the Department
of Higher Mathematics, III RTU MIREA, Moscow, Russia

Simonov Boris Vital'evich

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Docent, Docent of the
Departments of Applied Mathematics, Volgograd State Technical University,
Volgograd, Russia

Аннотация. В статье рассматриваются функции одной переменной. Устанавливаются взаимосвязи между модулями гладкости в разных метриках, уточняющие известные ранее оценки.

Abstract. Functions of one variable are considered in the article. The relationships between smoothness moduli in different metrics are established, refining previously known estimates.

Ключевые слова: модуль гладкости, метрика.

Keywords: moduli of smoothness, metric.

Введем следующие обозначения: $L_p, 1 \leq p \leq \infty$ – множество измеримых 2π – периодических функций $f(x)$ одной переменной, для которых $\|f\|_p < \infty$, где

$$\|f\|_p = \left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \text{ если } 1 \leq p < \infty, \quad \|f\|_p = \sup_{0 \leq x \leq 2\pi} |f(x)|, \text{ если } p = \infty;$$

L_p^0 – множество функций $f \in L_p, 1 \leq p \leq \infty$, таких, что $\int_0^{2\pi} |f(x)| dx = 0$;

$\omega_\alpha(f, t)_p$ – модуль гладкости функции $f \in L_p$ порядка $\alpha (\alpha > 0)$ в метрике L_p , т.е.

$$\omega_\alpha(f, t)_p = \sup_{|h| \leq t} \left\| \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \binom{\alpha}{m} f(x + (\alpha - m)h) \right\|_p,$$

где $\binom{\alpha}{m} = 1$ для $m = 0$, $\binom{\alpha}{m} = \alpha$ для $m = 1$, $\binom{\alpha}{m} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-m+1)}{m!}$ для $m \geq 2$;

$q^* = q$, если $q < \infty$, $q^* = 1$, если $q = \infty$.

Для неотрицательных функционалов $F(f, \delta)$ и $G(f, \delta)$ будем писать, что $F(f, \delta) \prec G(f, \delta)$, если существует положительная постоянная C , не зависящая от f и δ , такая, что $F(f, \delta) \leq CG(f, \delta)$. Если одновременно $F(f, \delta) \prec G(f, \delta)$ и $G(f, \delta) \prec F(f, \delta)$, то будем писать $F(f, \delta) \approx G(f, \delta)$.

Известны ([1]-[3]) следующие соотношения между модулями гладкости:

Пусть $f \in L_p^0, \alpha > 0, \delta \in (0,1)$. Тогда а) при $1 < p < q < \infty$

$$\omega_\alpha(f, \delta)_q \prec \left(\int_0^\delta \left(t^{-\frac{1}{p} + \frac{1}{q}} \omega_{\alpha + \frac{1}{p} - \frac{1}{q}}(f, t)_p \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q},$$

б) при $1 = p < q = \infty$

$$\omega_\alpha(f, \delta)_q \prec \int_0^\delta t^{-1} \omega_{\alpha+1}(f, t)_p \frac{dt}{t},$$

в) при $1 = p < q < \infty$

$$\omega_\alpha(f, \delta)_q \prec \left(\int_0^\delta \left(t^{-\frac{1}{p} + \frac{1}{q}} \omega_{\alpha + \frac{1}{p} - \frac{1}{q}}(f, t)_p \right)^q \log_2 \frac{2}{t} \frac{dt}{t} \right)^{1/q},$$

г) при $1 < p < q = \infty$

$$\omega_\alpha(f, \delta)_q \prec \int_0^\delta t^{-\frac{1}{p}} \omega_{\alpha + \frac{1}{p}}(f, t)_p \left(\log_2 \frac{2}{t} \right)^{1 - \frac{1}{p}} \frac{dt}{t}.$$

В работе [4] приведены более общие соотношения между модулями гладкости, из которых следуют перечисленные выше соотношения из пунктов а), б), в) и г). А именно, имеет место следующая теорема 1.

Теорема 1 ([4], стр. 67). Пусть $f \in L_p, 1 \leq p < q \leq \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \alpha > 0, \gamma \geq 0, m \geq 0,$

$\delta \in (0,1)$. Тогда

$$\omega_\alpha(f, \delta)_q \prec \delta^{-\gamma} \omega_{\alpha+\gamma}(f, \delta)_p \sigma\left(\frac{1}{\delta}\right) + \left(\int_0^\delta \left(t^{-\frac{1}{p} + \frac{1}{q}} \omega_{\alpha+m}(f, t)_p \right)^{q^*} \frac{dt}{t} \right)^{1/q^*}, \quad (1)$$

где

$$\sigma(t) := \begin{cases} 1, & \text{если } \gamma > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}, \\ 1, & \text{если } \gamma = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}, 1 < p < q < \infty, \\ \ln^{\frac{1}{p'}}(t+1), & \text{если } \gamma = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}, 1 < p < q = \infty, \\ \ln^{\frac{1}{q}}(t+1), & \text{если } \gamma = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}, 1 = p < q \leq \infty, \\ t^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q} - \gamma}, & \text{если } 0 \leq \gamma < \frac{1}{p} - \frac{1}{q}. \end{cases}$$

Замечание 1 ([4]). Из теоремы 1 при $m = \gamma$ следует неравенство

$$\omega_\alpha(f, \delta)_q < \left(\int_0^\delta \left(t^{-\gamma} \omega_{\alpha+\gamma}(f, t)_p \sigma\left(\frac{1}{t}\right) \right)^{q^*} \frac{dt}{t} \right)^{1/q^*}.$$

В работе [5] утверждения в) и г), а также теорема 1 в случаях, когда $\gamma = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}, 1 = p < q < \infty$ или $\gamma = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}, 1 < p < q = \infty$, были уточнены при помощи интерполяционного метода. А именно, имеет место следующая теорема 2.

Теорема 2 ([5]). Пусть $f \in L_p, \alpha > 0, \delta \in (0, 1)$. Тогда

1) при $1 = p < q < \infty$ справедливо неравенство

$$\omega_\alpha(f, \delta)_q < \left(\int_0^{\delta \left(\log_2 \frac{2}{\delta} \right)^{\frac{1}{\alpha q}}} \left(t^{-1+\frac{1}{q}} \omega_{\alpha+1-\frac{1}{q}}(f, t)_1 \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}. \quad (2)$$

2) при $1 < p < q = \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, справедливо неравенство

$$\omega_\alpha(f, \delta)_\infty < \int_0^{\delta \left(\log_2 \frac{2}{\delta} \right)^{\frac{1}{\alpha p'}}} t^{-\frac{1}{p}} \omega_{\alpha+\frac{1}{p}}(f, t)_p \frac{dt}{t}. \quad (3)$$

В данной работе результаты теорем 1 и 2 уточняются следующим образом.

Теорема 3. Пусть $f \in L_p^0$, $1 \leq p < q \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $\alpha > 0$, $\theta = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$, $\gamma \geq 0$, $m \geq 0$, $\delta \in (0, 1)$, $\psi = \psi(\gamma, p, q) = 1$, если $\gamma > \theta$ и $\psi = \psi(\gamma, p, q) = 0$, если $\gamma \leq \theta$. Тогда

$$\omega_\alpha(f, \delta)_q \prec \delta^\alpha \left(\int_\delta^1 \left(t^{-\alpha - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}} \omega_{\alpha+\gamma}(f, t)_p \right)^{q^*} \frac{dt}{t} \right)^{1/q^*} +$$

$$+ \left(\delta \left(\sigma_1 \left(\frac{1}{\delta} \right) \right)^{\frac{1-\psi}{\alpha}} \right)^{-\theta} \omega_{\alpha+\gamma} \left(f, \delta \left(\sigma_1 \left(\frac{1}{\delta} \right) \right)^{\frac{1}{\alpha+\gamma\psi}} \right)_p + \left(\int_0^\delta \left(t^{-\theta} \omega_{\alpha+m}(f, t)_p \right)^{q^*} \frac{dt}{t} \right)^{1/q^*}, \quad (4)$$

где функция $\sigma_1(t)$ при $\gamma = \theta$ совпадает с $\sigma(t)$ из теоремы 1, а при $\gamma > \theta$ $\sigma_1(t) \equiv 1$, а при $\gamma < \theta$ функция $\sigma_1(t) = t^{\theta-\gamma}$.

Замечание 2. В работе [5] неравенства (2) и (3) были доказаны при помощи интерполяционного метода. В работе [6] неравенства (2) и (3) были доказаны другим методом. В данной работе при доказательстве теоремы 3 использован метод, предложенный при доказательстве неравенств (2) и (3) в работе [6].

Замечание 3. Если $\gamma > \theta$, то

$$\delta^\alpha \left(\int_\delta^1 \left(t^{-\alpha - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}} \omega_{\alpha+\gamma}(f, t)_p \right)^{q^*} \frac{dt}{t} \right)^{1/q^*} +$$

$$+ \left(\delta \left(\sigma_1 \left(\frac{1}{\delta} \right) \right)^{\frac{1-\psi}{\alpha}} \right)^{-\theta} \omega_{\alpha+\gamma} \left(f, \delta \left(\sigma_1 \left(\frac{1}{\delta} \right) \right)^{\frac{1}{\alpha+\gamma\psi}} \right)_p \approx \delta^{-\theta} \omega_{\alpha+\gamma} \left(f, \delta \left(\sigma_1 \left(\frac{1}{\delta} \right) \right)^{\frac{1}{\alpha+\gamma}} \right)_p.$$

Замечание 4. Из неравенства (4) следуют оценки (1), (2) и (3).

Список литературы

1. Потапов М. К. О соотношениях между модулями гладкости в разных метриках / М. К. Потапов, Б. В. Симонов, С. Ю. Тихонов // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2009. № 3. С. 17-25.
2. Tikhonov S. Ulyanov inequalities and generalized Liouville derivatives / S. Tikhonov, W. Trebels // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. 2011. 141. No. 1. P. 205-224.

3. Tikhonov S. Weak type inequalities for moduli of smoothness: the case of limit value parameters / S. Tikhonov // J. Fourier Anal. Appl. 2010. 16. No. 4. P. 590-608.

4. Kolomoitsev Yu. Hardy-Littlewood and Ulyanov inequalities / Yu. Kolomoitsev, S. Tikhonov // Mem Amer. Soc. 271(1325) (2021), Arxiv: 1711.08163.

5. Domingues O. Embedding of smooth function spaces extrapolations, and related inequalities / O. Domingues, S. Tikhonov // ArXiv: 1909.12818v2 [math.FA] \setminus 22 \setminus Nov \setminus 2019 C. 1-71.

6. Потапов М. К. Уточнение соотношений между модулями гладкости / М. К. Потапов, Б. В. Симонов // Вестн. Моск. ун-та, сер. 1, Математика. Механика. 2023. № 2. С. 11-23.

References

1. Potapov M. K. Relations between moduli of smoothness in different metrics/ M. K. Potapov, B. V. Simonov, S. Yu. Tikhonov // Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh. 2009. No. 3. P. 17–25.

2. Tikhonov S. Ulyanov inequalities and generalized Liouville derivatives / S. Tikhonov, W. Trebels // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. 2011. 141. No. 1. P. 205-224.

3. Tikhonov S. Weak type inequalities for moduli of smoothness: the case of limit value parameters / S. Tikhonov // J. Fourier Anal. Appl. 2010. 16. No. 4. P. 590-608.

4. Kolomoitsev Yu. Hardy-Littlewood and Ulyanov inequalities / Yu. Kolomoitsev, S. Tikhonov // Mem Amer. Soc. 271(1325) (2021), Arxiv: 1711.08163.

5. Domingues O. Embedding of smooth function spaces extrapolations, and related inequalities / O. Domingues, S. Tikhonov // ArXiv: 1909.12818v2 [math.FA] \setminus 22 \setminus Nov \setminus 2019 C. 1-71.

6. Potapov M. K. Improvements of interrelations between moduli of smoothness / M. K. Potapov, B. V. Simonov// Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh. 2023. No. 2 P. 11–23.