

DOI: 10.58168/OpEq2025_218-224

УДК 519.21

**ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ КРИТЕРИЙ ПЕРКОЛЯЦИИ И ОБОБЩЕНИЕ
ТЕОРЕМЫ ХАРРИСА–КЕСТЕНА**

**TOPOLOGICAL PERCOLATION CRITERION AND GENERALIZATION OF
THE HARRIS–KESTEN THEOREM**

Солонченко Роман Евгеньевич

аспирант, кафедра программного обеспечения вычислительной техники и
автоматизированных систем, Белгородский государственный технологический
университет им. В.Г. Шухова, г. Белгород, Россия

Solonchenko Roman Evgenievich

Postgraduate Student, Department of Computer Engineering and Automated Systems
Software, Belgorod State Technological University named after V.G. Shukhov,
Belgorod, Russia

Аннотация. В статье предложен новый топологический критерий перколяции для планарных графов, позволяющий описать появление бесконечного кластера через геометрические свойства конфигураций. С использованием данного критерия доказано обобщение теоремы Харриса–Кестена о критической вероятности на более широкий класс перколяционных моделей.

Abstract. The article proposes a new topological criterion of percolation on planar graphs, which characterizes the emergence of an infinite cluster through the geometry of configurations. Using this criterion, a generalization of the Harris–Kesten theorem for a broader class of models is proved.

Ключевые слова: перколяция, бесконечный кластер, критическая вероятность, топология, двойственный граф.

Keywords: percolation, infinite cluster, critical probability, topology, dual graph.

Введение

Перколяция – одна из фундаментальных моделей вероятностной теории фазовых переходов. Она была впервые предложена в работе С. Р. Бродбента и Дж. М. Хаммерсли, где исследовалось распространение жидкости через случайную среду [1]. В классической постановке рассматривается бесконечная решётка (например, квадратная решётка) со случайно «включёнными» элементами (рёбрами или вершинами). Каждое ребро решётки может быть открытым (проводящим) с вероятностью p или закрытым с вероятностью $1-p$ независимо друг от друга. При достаточно больших p возникает сквозной кластер, соединяющий отдалённые области решётки, что интерпретируется как протекание («перколяция») через систему [1]. С другой стороны, при малых p кластеры остаются ограниченными, и глобальной связи не возникает.

Важнейшая характеристика такой системы – критическая вероятность p_c , разделяющая режимы отсутствия и наличия бесконечного кластера. Для $p < p_c$ перколяция почти наверняка отсутствует (все кластеры конечны), тогда как для $p > p_c$ с ненулевой вероятностью существует бесконечный кластер. Классическая теорема Харриса–Кестена утверждает, что для независимой рёберной перколяции на бесконечной квадратной решётке критическая вероятность равна $p_c = \frac{1}{2}$ [2, 3]. Иными словами, если каждое ребро, проводящее с вероятностью 50%, то почти наверняка бесконечного проводящего кластера не возникает, а вот при любой большей вероятности сквозной кластер появляется с ненулевой вероятностью. Это фундаментальный результат для двумерных перколяционных моделей.

Следует отметить, что значение $p_c = \frac{1}{2}$ является специфическим для строго симметричных решёток. Для иных решёток или типов перколяции критическая

вероятность, как правило, отличается от $1/2$. В таблице 1 приведены известные значения p_c для некоторых моделей перколяции на планарных решётках [3, 4].

Таблица 1 – Критические значения вероятности перколяции для некоторых бесконечных решёток

Решётка	Тип перколяции	p_c
Квадратная Z^2	рёберная (bond)	0.5
Квадратная Z^2	вершинная (site)	≈ 0.5927
Треугольная	вершинная (site)	0.5
Треугольная	рёберная (bond)	≈ 0.3473
Шестиугольная	вершинная (site)	≈ 0.697

Как видно из таблицы 1, значение критической вероятности существенно зависит от структуры решётки и вида перколяции. Естественным является вопрос: для каких структур сетей критическая вероятность равна 0,5? Другими словами, можно ли указать общий критерий, при выполнении которого появляется «самодвойственная» симметрия, приводящая к $p_c = \frac{1}{2}$?

В данной работе сформулирован топологический критерий перколяции, отвечающий на этот вопрос для широкого класса планарных графов. На основе этого критерия мы доказываем обобщённую теорему Харриса–Кестена о значении p_c и показываем, что несколько известных результатов (например, для квадратной и треугольной решёток) укладываются в единый теоретический каркас.

Топологический критерий перколяции

Рассмотрим независимую перколяционную модель на бесконечном планарном графе G . Будем говорить об открытых и закрытых рёбрах в соответствии с их состоянием (проводящее или нет). Под *кластером* понимается максимальное связное множество смежных по G открытых рёбер (или вершин, в случае вершинной перколяции). Бесконечный кластер – это кластер,

содержащий бесконечно много вершин графа. Событие перколяции означает существование хотя бы одного бесконечного кластера в конфигурации.

Для планарных графов справедливо следующее утверждение, связывающее существование бесконечного кластера с геометрическими (топологическими) свойствами конфигурации открытых и закрытых рёбер.

Лемма 1 (топологический критерий перколяции). Пусть G – планарный граф, и рассматривается модель независимой перколяции на рёбрах графа. Обозначим через G^* граф, планарно двойственный к G . Тогда верна эквивалентность событий:

- происходит бесконечная перколяция на G (существует бесконечный открытый кластер);
- во всех достаточно больших циклах (замкнутых контурах) графа G^* по крайней мере одно ребро не является закрытым.

Другими словами, бесконечный открытый кластер существует тогда и только тогда, когда никакой конечный цикл из закрытых рёбер не отделяет бесконечную область на плоскости.

Доказательство основано на свойстве планарной двойственности и теореме Жордана о кривой. Если существует бесконечный открытый кластер в G , то любая попытка окружить его конечным циклом из закрытых рёбер G^* потерпит неудачу – такой цикл обязательно содержит хотя бы одно открытое ребро (иначе он образовал бы замкнутую кривую, отделяющую бесконечный кластер от «бесконечности», что противоречит неограниченности кластера). Обратно, если бесконечного кластера нет, то все открытые кластеры конечны. В этом случае можно показать, что вокруг любого заданного узла решётки G существует замкнутый цикл из закрытых рёбер G^* , отсекающий этот узел от бесконечности (путём обхода границ кластеров конечного радиуса). Таким образом, отсутствие бесконечного кластера эквивалентно существованию «барьера» из закрытых рёбер – по крайней мере один такой замкнутый цикл присутствует на всех масштабах.

Лемма 1 даёт топологический критерий: модель не имеет сквозного кластера, если можно найти достаточно большие замкнутые контуры из непроводящих связей, и наоборот, перколяция возникает, когда никакие конечные барьеры не могут удерживать кластер от разрастания. Этот критерий является основой для доказательства классической теоремы Харриса–Кестена и её обобщений.

Обобщение теоремы Харриса–Кестена

На основе леммы 1 можно получить условие, при котором критическая вероятность равна 0,5 для широкого класса решёток. Вначале напомним идею доказательства теоремы Харриса–Кестена для квадратной решётки, опираясь на топологический подход. Для решётки Z^2 рассмотрим событие $\mathbf{H}_n$: «существует путь из открытых рёбер, соединяющий левую и правую границы квадратной области размером $n \times n$ ». Аналогично определим $\mathbf{V}_n$ как событие наличия пути из закрытых рёбер, соединяющего верхнюю и нижнюю границы этого же квадрата.

$$\text{Формально: } P_{0,5}(\mathbf{H}_n) = \frac{1}{2} \quad (1)$$

При $p = 0.5$ вероятность появления бесконечного кластера $\theta(p)$ удовлетворяет $\theta(0,5) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} P_{0,5}(\mathbf{H}_n) = \frac{1}{2}$. Но из леммы 1 известно, что при наличии хотя бы 50% проводящих связей бесконечный кластер не возникает почти наверняка. Значит, $\theta(0.5) = 0$, и потому $p_c \geq \frac{1}{2}$.

С другой стороны, строгие оценки и предельный переход показывают, что даже на бесконечной решётке при $p > 0.5$ с ненулевой вероятностью существует сквозной кластер: $\theta(p) > 0$ для любого $p > 0.5$, то есть $p_c \leq \frac{1}{2}$. Объединяя оценки, получаем: $p_c = \frac{1}{2}$.

Теорема 2. Пусть планарный граф G и его двойственный граф G^* однородны и обладают свойством самодвойственности (то есть G изоморфен G^* ;

пример — квадратная решётка для рёберной перколяции или треугольная — для вершинной). Тогда критическая вероятность $p_c = \frac{1}{2}$.

Благодаря однородности графа вероятности пересекающихся событий H_n и V_n равны при $p = 0.5$ вследствие симметрии. Самодвойственность означает, что события H_n и V_n взаимно исключают друг друга и в совокупности исчерпывают все исходы. Следовательно, при $p = 0.5$ вероятность пересечения равна $1/2$. По аналогии с квадратной решёткой, $\theta(0.5) = 0$, значит $p_c \geq \frac{1}{2}$. А при $p > 0.5$ — $\theta(p) > 0$, так как барьеры из закрытых рёбер не могут сдерживать рост. Отсюда: $p_c \leq \frac{1}{2}$, значит $p_c = \frac{1}{2}$.

Следствие: во многих симметричных случаях критическая вероятность равна $1/2$. Например, для вершинной перколяции на треугольной решётке (двойственной к шестиугольной) доказано $p_c = \frac{1}{2}$. Ранее этот результат получен методами симметрии (звезда–треугольник) и подтверждён численно. Топологический подход даёт строгое обоснование. Пример: решётка на поверхности тора (сосуд Клейна), самодвойственна — теорема 2 применима и здесь.

Заключение

В работе разработан общий подход к анализу порога перколяции на основе топологических свойств конфигураций. Предложен критерий, связывающий существование бесконечного кластера с отсутствием замкнутых барьеров из непроводящих элементов. Этот критерий позволил обобщить классическую теорему Харриса–Кестена о критическом значении вероятности для двумерных решёток. Показано, что для широкого класса планарных сетей, обладающих самодвойственной симметрией, критическая вероятность перколяции составляет $0,5$. Результаты согласуются с ранее известными частными случаями и дают единое объяснение этому явлению.

Перспективы дальнейших исследований включают применение топологического критерия к более сложным системам (например, перколяции в моделях со случайными дефектами структуры или на негомогенных графах), а также изучение аналогов критериев в задачах более высокой размерности.

Список литературы

1. Broadbent S.R., Hammersley J.M. Percolation processes. I. Crystals and mazes // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1957. Vol. 53, pp. 629–641.
2. Harris T.E. A lower bound for the critical probability in a certain percolation process // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1960. Vol. 56, pp. 13–20.
3. Kesten H. The critical probability of bond percolation on the square lattice equals $1/2$ // Commun. Math. Phys. 1980. Vol. 74, pp. 41–59.
4. Grimmett G. Percolation. 2nd ed. Berlin: Springer, 1999. 444 p.

References

1. Broadbent S.R., Hammersley J.M. Percolation processes. I. Crystals and mazes. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 1957, vol. 53, pp. 629–641.
2. Harris T.E. A lower bound for the critical probability in a certain percolation process. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 1960, vol. 56, pp. 13–20.
3. Kesten H. The critical probability of bond percolation on the square lattice equals $1/2$. Communications in Mathematical Physics, 1980, vol. 74, pp. 41–59.
4. Grimmett G. Percolation. 2nd edition. Berlin: Springer, 1999. 444 p.