

DOI: 10.58168/OpEq2025_225-231

УДК 517.982.22

**ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ПОЛУЛИНЕЙНОГО
ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ**

APPROXIMATE SOLUTION OF A POLYLINEAR PARABOLIC EQUATION

Спирина Надежда Михайловна

старший преподаватель кафедры математики ВГЛУ, г. Воронеж, Россия

Сапронов Иван Васильевич

кандидат физико-математических наук, доцент,

доцент кафедры математики ВГЛУ, г. Воронеж, Россия

Веневитина Светлана Семеновна

кандидат физико-математических наук, доцент,

доцент кафедры математики ВГЛУ, г. Воронеж, Россия

Spirina Nadezhda Mikhailovna

Senior Lecturer at the Department of Mathematics, VSUFT, Voronezh, Russia

Sapronov Ivan Vasilievich

Ph.D. of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate

Professor at the Department of Mathematics, VSUFT, Voronezh, Russia

Venevitina Svetlana Semyonovna

Ph.D. of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate

Professor at the Department of Mathematics, VSUFT, Voronezh, Russia

Аннотация. Анализируется вопрос о сходимости метода Тонелли решения задачи Коши для абстрактного полулинейного параболического уравнения. Приводятся оценки погрешности метода.

Abstract. The convergence of Tonelli's method for solving the Cauchy problem for an abstract semilinear parabolic equation is analyzed. The error estimates of the method are provided.

Ключевые слова: банахово пространство, линейный оператор, задача Коши, метод Тонелли.

Keywords: Banach space, linear operator, Cauchy problem, Tonelli's method.

В банаховом пространстве E рассмотрим операторное уравнение с начальным условием

$$\frac{dx}{dt} + Ax = f(t, x) \quad (0 \leq t \leq 1), \quad (1)$$

$$x(0) = x. \quad (2)$$

Здесь $x(t)$ – неизвестная функция, с областью определения на отрезке на $[0, 1]$ с множеством значений в E , $f(t, x)$, при $t \in [0, 1]$ – нелинейный оператор, A – действующий в E линейный оператор с областью определения $D(A)$, x_0 – элемент, принадлежащий области $D(A)$. Функцию $x(t)$ будем считать решением задачи (1) – (2), если у неё существует непрерывная производная $\frac{dx}{dt}$ на $[0, 1]$, $x(t)$, $Ax(t)$ непрерывны на этом отрезке и $x(t)$ удовлетворяет (1) – (2).

Предположим также, что A – сильно позитивный оператор, то есть порождает аналитическую подгруппу $T(t)$. На функцию $f(t, x)$ наложим следующие ограничения:

$$\begin{aligned} \|f(t_1, x_1) - f(t_2, x_2)\| &\leq c(R)(|t_1 - t_2|^\delta + \|x_1 - x_2\|) \\ (0 \leq t_1, t_2 \leq 1, \|x_1\|, \|x_2\| \leq R, 0 \leq \delta < 1). \end{aligned} \quad (3)$$

Из [1] известно, что при этих условиях существует единственное решения задачи (1)–(2) на отрезке $[0, t] \subset [0, 1]$, и для этого решение $x(t)$ справедливо уравнение

$$x(t) = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)f(s, x(s))ds. \quad (4)$$

Метод Тонелли, по которому будем искать приближенное решение $x_n(t)$ задачи (1) – (2), состоит в следующем.

По $n=1,2,\dots$ и $h=1/n$ найдём $x_n(t)$ как решение задачи (5) - (6), где

$$\frac{dx_n(t)}{dt} + Ax_n(t) = f(t, x_n(t-h)) \quad (0 \leq t \leq 1), \quad (5)$$

$$x_n(t) = x_0 \quad (-h \leq t \leq 0). \quad (6)$$

Функцию $x_n(t)$ будем называть решением задачи (5) – (6), в том случае, если на отрезке $[0,1]$ существуют непрерывные производные $\frac{dx_n(t)}{dt}$, и $x_n(t)$, $Ax_n(t)$ тоже непрерывны на этом отрезке, к тому же $x_n(t)$ удовлетворяет (5) - (6).

Решение $x_n(t)$ будем находить последовательно на отрезках $[0, h]$, $[h, 2h]$... из следующего равенства

$$x_n(t) = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)f(s, x_n(s-h))ds.$$

Задачи (1) – (2), разрешима локально, а задача (5) – (6) имеет решение на всем отрезке $[0,1]$.

Будем исследовать сходимость $x_n(t)$ к $x(t)$ и $Ax_n(t)$ к $Ax(t)$ на отрезке $[0, t]$, и, в случае, если $x(t)$ существует на всем отрезке $[0,1]$, докажем сходимость на всем отрезке $[0,1]$.

Теорема 1. Задача (1) – (2) имеет единственное решение на отрезке $[0, t]$, удовлетворяющее оценке

$$\|x_n(t) - x(t)\| \leq \mathbb{Z}h \quad (7)$$

где $\mathbb{Z} = const$.

Доказательство. Существование решения, его единственность доказаны в [1]. Для доказательства оценки (7) рассмотрим две леммы.

Лемма 1. На отрезке $[0, t]$ для решения $x_n(t)$ выполнено условие $\|x_n(t)\| \leq R$.

Лемма 2. Производная $x_n'(t)$ является ограниченной функцией на каждом ограниченном в E множестве, то есть

$$\|x_n'(t)\| \leq P(R) \quad (0 \leq t \leq 1, \|x_n(t)\| \leq R).$$

Воспользуемся условием (3) и этими леммами. Получим следующую оценку

$$\begin{aligned} \|x(t) - x_n(t)\| &\leq Wc(R) \int_0^t \|x_n(s) - x_n(s-h)\| ds + \\ &+ Wc(R) \int_0^t \|x(s) - x_n(s)\| ds \leq Wc(R)P(R)h + Wc(R) \int_0^t \|x_n(s) - x(s)\| ds \end{aligned}$$

Из этого неравенства следует:

$$\|x_n(t) - x(t)\| \leq \mathbb{Z}h$$

где $\mathbb{Z} = W_c(R)P(R)e^{W_c(R)}$.

Таким образом, теорема доказана.

Так как A — сильно позитивный оператор, то при любых действительных α определены его дробные степени.

В [1] показано: отрицательные дробные степени оператора A являются ограниченными. Таким образом, из сходимости $A^\alpha x_n(t)$ и $A^\alpha x(t)$ должна следовать сходимость $x_n(t)$ и $x(t)$. Докажем это утверждение.

Теорема 2. На отрезке $[0, t]$ справедлива оценка

$$\|A^\alpha x_n(t) - A^\alpha x(t)\| \leq \mathbb{Z}(\alpha)h \quad (8)$$

где $\mathbb{Z}(\alpha)h = \text{const}, 0 < \alpha < 1$.

Доказательство. Оценим $\|A^\alpha x_n(t) - A^\alpha x(t)\|$.

Получаем:

$$\begin{aligned} \|A^\alpha x_n(t) - A^\alpha x(t)\| &\leq c(\alpha, R) \int_0^t \frac{\|x(s) - x_n(s)\|}{(t-s)^\alpha} ds + \\ &+ c(\alpha, R)P(R)h \int_0^t \frac{ds}{(t-s)^\alpha}. \end{aligned}$$

Пользуясь теоремой 1, получаем оценку (8)

Таким образом, теорема доказана.

Докажем оценку (8) при $\alpha = 1$. В этом случае будет справедливо утверждение о сходимости производной приближенного решения к производной точного решения.

Пусть оператор $f(t, x)$ удовлетворяет дополнительным ограничениям.

Полагаем следующее:

существует производная Фреше $f'_x(t, x)$, удовлетворяющая неравенству:

$$\begin{aligned} \|f'_x(t_1, x_1) - f'_x(t_2, x_1)\|_{Z(E)} &\leq C(R) \left(|t_1 - t_2|^\delta + \|x_1 - x_2\|_E^\rho \right) \\ (\|x_1\|_E, \|x_2\|_E \leq R, \delta, \rho \in (0, 1)). \end{aligned} \quad (9)$$

При доказательстве оценки (8), будем опираться на следующие леммы

Лемма 3. Справедливо следующее равенство:

$$f(t, x_1) - f(t, x_2) = K(t, x_1, x_2)(x_1 - x_2),$$

где

$$K(t, x_1, x_2) = \int_0^1 f'_x(t, \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) d\lambda,$$

и следующая оценка:

$$\begin{aligned} \|K(t_1, x_1, y_1) - K(t_2, x_2, y_2)\|_{Z(E)} &\leq C(R) \left(|t_1 - t_2|^\delta + \|x_1 - x_2\|_E^\rho + \|y_1 - y_2\|_E^\rho \right) \\ (0 \leq t_1, t_2 \leq 1, \|x_1\|_E, \|x_2\|_E, \|y_1\|_E, \|y_2\|_E \leq R). \end{aligned}$$

Пусть $\varphi_h(t) = x(t) - x_n(t - h)$.

Лемма 4. Справедливо следующее неравенство:

$$\|\varphi_h(t + h + \Delta t) - \varphi_h(t + h)\| \leq \frac{Qh}{(t + h)^\alpha}, \text{ где } 0 \leq \alpha \leq 1, Q = \text{const}.$$

Теорема 3. Если оператор A сильно позитивен, оператор $f(t, x)$ удовлетворяет условию (3), оператор $f'_x(t, x)$ удовлетворяет условию (9),

на отрезке $[0, t^*]$ верна оценка

$$\|Ax_n(t) - ax(t)\| \leq M \cdot h, \text{ где } M = \text{const}.$$

Доказательство. Введем обозначение:

$$K(t, x_n(t - h), x(t)) = K(t).$$

Следовательно,

$$Ax_n(t) - Ax(t) = \int_0^t AT(t-s)K(s)(\varphi_n(s) - \varphi_n(t))ds + \\ + \int_0^t AT(t-s)(K(s) - K(t))\varphi_n(t)ds + (1-T(t))K(t)\varphi_n(t) = J_1 + J_2 + J_3.$$

Будем оценивать каждое слагаемое.

Очевидно, что $\|J_2\| \leq N_2 h$, $\|J_3\| \leq N_3 h$, где N_2 , N_3 – константы.

J_1 рассмотрим в каждом из трёх случаев:

1) $0 < t \leq h$, 2) $h < t \leq 2h$, 3) $t > 2h$.

В случае 1) и 3) очевидно, что $\|J_1\| \leq N_1 h$.

В случае 2) воспользуемся леммой 4 и получим:

$$\|J_1\| \leq Qh \int_h^1 \frac{ds}{(t-s)^\alpha s^{1-\alpha}} \leq \tilde{Q}h.$$

Выберем $M = \max(N_1, N_2, N_3, \tilde{Q})$.

Таким образом, теорема доказана.

Теорема 4. $A^\alpha x_n(t)$ сходится к $A^\alpha x(t)$ при $0 \leq \alpha \leq 1$ на промежутке $[0, 1]$.

Доказательство. Пусть R – константа. Ранее доказано, что на отрезке $[0, t^*]$ верна оценка (8). Зафиксируем h ($h < R/Z$), и получим на этом отрезке $\|x_n(t) - x(t)\| \leq R$.

Рассмотрим множество $H = \{\tau : 0 \leq t \leq \tau \mid \|x_n(t) - x(t)\| \leq R\}$. Множество H ограничено. Следовательно, существует $\bar{\tau}(h)$ верхняя граница этого множества, где $\bar{\tau}(h) \in H$.

Очевидно, что $\bar{\tau}(h) = 1$, в случае, если приближенные решения $x_n(t)$ строить по $h < R/N$, при этом считаем, что N – достаточно велико, то есть приближенные решения будем строить по достаточно малому h . Таким образом получим, что $x_n(t)$ сходится к $x(t)$ на отрезке $[0, 1]$.

Рассматривая $A^\alpha x_n(t) - A^\alpha x(t)$ при $0 < \alpha < 1$. Получим оценку (8) на всем отрезке $[0,1]$.

При $\alpha = 1$ доказательство оценки (8) аналогично доказательству теоремы 3.

Таким образом, теорема доказана.

Список литературы

1. Филиппов Л.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. – М.: Наука, 2020. – 224 с.

References

1. Filippov, L.F. Differential Equations with Discontinuous Right-Hand Side. Moscow: Nauka, 2020. 224 p.