

DOI: 10.58168/OpEq2025_240-245

УДК 517.984

**СПЕКТР И СВЯЗАННЫЕ СОСТОЯНИЕ ОПЕРАТОРА ЭНЕРГИИ ТРЕХ
МАГНОННЫХ СИСТЕМ В МОДЕЛИ ГЕЙЗЕНБЕРГА В ДВУМЕРНОМ
И ТРЕХМЕРНОМ РЕШЕТКЕ**

**SPECTRA AND BOUND STATE OF THE ENERGY OPERATOR OF THREE-
MAGNON SYSTEMS IN THE HEISENBERG MODEL IN THE TWO- AND
THREE-DIMENSIONAL LATTICE**

Ташпулатов Саъдулла Мамаражабович

Доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, ведущий
научный сотрудник института ядерной физики академии наук республики
Узбекистан, Ташкент, Узбекистан

Tashpulatov Sadulla Mamarajabovich

D. Sc. of Physical and Mathematical Sciences, senior researcher, leading researcher
at the institute of Nuclear Physics of the academy of Sciences of the Republic
of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan

Аннотация. Исследована структура существенного спектра и дискретный спектр оператора энергии трехмагнонных систем в модели Гейзенберга.

Abstract. Investigated the structure of essential spectra and discrete spectra of the energy operator of three-magnon systems in the Heisenberg model.

Ключевые слова: трехмагнонная система, связанные состояние, модель Гейзенберга, существенный спектр.

Keywords: three-magnon systems, bound states, Heisenberg model, essential spectra.

Рассматривается оператора энергии трехмагнонных систем в модели Гейзенберга в двумерном и трехмерном решетке и исследуется структура существенного спектра и дискретный спектр системы. В работе [1] трехмагнонная система была рассмотрена в двумерной изотропной и анизотропной ограниченной ферромагнитной решетке, и были исследованы спектр и связанные состояния (СС) системы с помощью численных методов. В работе [2] трехмагнонная система была рассмотрена в изотропной негейзенберговской ферромагнитной модели со значениями спина единицы с взаимодействием ближайших соседей. Изучена структура существенного спектра системы и была получена верхняя и нижняя оценка для количества трехмагнонных СС системы. В данной работе рассматривается оператор энергии трехмагнонных систем в модели Гейзенберга и исследуется структура существенного спектра и дискретный спектр системы в одномерном ферромагнетике. Гамильтониан рассматриваемой системы имеет вид

$$H = J \sum_{m,\tau} (\vec{S}_m \vec{S}_{m+\tau}). \quad (1)$$

Здесь $J < 0$ – параметр билинейного обменного взаимодействия между атомами ближайших соседей в решетке, $\vec{S}_m = (S_m^x, S_m^y, S_m^z)$ – оператор атомного спина узла m ν – мерной целочисленной решетки Z^ν , а $\tau = \pm e_j$, $j = 1, 2, \dots, \nu$, где e_j – единичные орты, т.е. суммирование ведется по ближайшим соседям. Положим $S_m^\pm = S_m^x \pm i S_m^y$. Обозначим через φ_0 вектор, называемый вакуумным и однозначно определяемый условиями: $S_m^+ \varphi_0 = 0$, $S_m^z \varphi_0 = \frac{1}{2} \varphi_0$, $||\varphi_0|| = 1$. Векторы $S_p^- S_q^- S_r^- \varphi_0$ описывает состояние системы трех магнонов, находящихся в узлах p, q и r . Замыкание пространства, образованного всевозможными линейными комбинациями этих векторов, обозначим через $\mathcal{H}_3$. Оно называется трехмагнонным пространством оператора H .

Теорема 1. Подпространство $\mathcal{H}_3$ инвариантно относительно оператора H , и сужение H_3 оператора H на подпространство $\mathcal{H}_3$ является ограниченным самосопряженным оператором. Он порождает ограниченный самосопряженный

оператор $\bar{H}_3$, действующий в пространстве l_2^{as} по формуле $(\bar{H}_3 f)(p, q, r) =$

$$\begin{aligned}
&= J \sum_{\tau} [\delta_{p,q+\tau} + \delta_{p+\tau,q} + \delta_{p+\tau,r} + \delta_{p,r+\tau} + \delta_{q,r+\tau} + \delta_{q+\tau,r} - 6] f(p, q, r) - \\
&- \frac{1}{2} \delta_{p-\tau,q} f(p - \tau, q, r) - \frac{1}{2} \delta_{p-\tau,r} f(p - \tau, q, r) - \frac{1}{2} \delta_{q-\tau,r} f(p, q - \tau, r) - \\
&- \frac{1}{2} \delta_{q,r-\tau} f(p, q, r - \tau) - \frac{1}{2} \delta_{p,q-\tau} f(p, q - \tau, r) - \frac{1}{2} \delta_{p,r-\tau} f(p, q, r - \tau) + \\
&+ f(p - \tau, q, r) + f(p, q - \tau, r) + f(p, q, r - \tau) - \frac{1}{2} \delta_{p+\tau,q} f(p + \tau, q, r) - \\
&- \frac{1}{2} \delta_{p+\tau,r} f(p + \tau, q, r) - \frac{1}{2} \delta_{q+\tau,r} f(p, q + \tau, r) - \frac{1}{2} \delta_{q,r+\tau} f(p, q, r + \tau) - \\
&- \frac{1}{2} \delta_{p,q+\tau} f(p, q + \tau, r) - \frac{1}{2} \delta_{p,r+\tau} f(p, q, r + \tau) + f(p + \tau, q, r) + f(p, q + \tau, r) + \\
&+ f(p, q, r + \tau)], \tag{2}
\end{aligned}$$

где $\delta_{k,j}$ – кронекеровский символ. Сам оператор H_3 на вектор $\psi \in \mathcal{H}_3$ действует по формуле

$$H_3 \psi = \sum_{p,q,r \in Z^v} (\bar{H}_3 f)(p, q, r) S_p^- S_q^- S_r^- \varphi_0. \tag{3}$$

Определение 1. Собственная функция $\varphi_{\Lambda} \in L_2(T^v)$ оператора $\tilde{H}_{3\Lambda}$, отвечающая собственному значению $z_{\Lambda} \in \sigma_{ess}(\tilde{H}_{3\Lambda})$, называется связанным состоянием (СС) оператора $\tilde{H}_{3\Lambda}$, а величина z_{Λ} – энергией этого СС.

Положим $\Lambda_1 = \lambda + \mu$, $\Lambda_2 = \mu + \gamma$ и $\Lambda_3 = \lambda + \gamma$, где λ, μ, γ есть квазиимпульсы магнонов. Обозначим через $\mathcal{F}$ преобразование Фурье: $\mathcal{F}: l_2((Z^v)^3) \rightarrow L_2((T^v)^3) \equiv \tilde{\mathcal{H}}_3$, где T^v – v – мерный тор, снабженный нормированной мерой Лебега $d\lambda$, т.е., $\lambda(T^v) = 1$. Положим $\tilde{H}_3 = \mathcal{F} \bar{H}_3 \mathcal{F}^{-1}$. В квазиимпульсном представлении оператор $\bar{H}_3$ действует в гильбертовом пространстве $L_2^{symm}((T^v)^3)$, где L_2^{symm} – подпространство симметричных функций в $L_2((T^v)^3)$.

Теорема 2. Преобразование Фурье переводит оператор $\bar{H}_3$ в ограниченный самосопряженный оператор $\tilde{H}_3 = \mathcal{F} \bar{H}_3 \mathcal{F}^{-1}$, действующий в пространстве $L_2^{symm}((T^v)^3)$ по формуле

$$\begin{aligned}
\tilde{H}_3 \psi_3 = & -J\{12 - 4\cos\lambda - 4\cos\mu - 4\cos\gamma\}f(\lambda, \mu, \gamma) + J \int_{T^v} [12 + 2\cos(\lambda - s) + \\
& + 2\cos(\mu - s) - 2\cos s - 2\cos(\lambda + \mu - s) - 4\cos\lambda - 4\cos\mu - 4\cos\gamma] \times \\
& \times f(s, \lambda + \mu - s, \gamma) ds + J \int_{T^v} [12 - 4\cos\lambda - 4\cos\mu - 4\cos\gamma + 2\cos(\lambda - s) + \\
& + 2\cos(\gamma - s) - 2\cos s - 2\cos(\lambda + \gamma - s) f(s, \mu, \lambda + \gamma - s) ds + \\
& + J \int_{T^v} [12 - 4\cos\lambda - 4\cos\mu - 4\cos\gamma - 2\cos s - 2\cos(\mu + \gamma - s) + \\
& + 2\cos(\mu - s) + 2\cos(\gamma - s) f(\lambda, s, \mu + \gamma - s) ds + \\
& + J \int_{T^v} \int_{T^v} [12 - 44\cos\lambda - 4\cos\mu - 4\cos\gamma + 3\cos(\lambda + \mu + \gamma - s - t) + \\
& + 2\cos(\lambda + \mu - s) + 4\cos s + 2\cos(\lambda + \gamma - s) + 4\cos t + 2\cos(\lambda + \mu - t) + \\
& + 2\cos(\mu + \gamma - t) + \cos(\lambda + t) + 2\cos(\mu - s - t) + 2\cos(\lambda - s - t) - \\
& - 8\cos(\lambda - s) - 6\cos(\mu - t) - 8\cos(\lambda + \mu - s - t) - \\
& - 2\cos(\lambda - t) f(s, t, \lambda + \mu + \gamma - s - t) ds dt.
\end{aligned} \tag{4}$$

Теорема 3. а). Если $\nu = 2$ и полный квазиимпульс системы $\Lambda = (\pi, \pi)$, тогда существенный спектр оператора $\tilde{H}_{3\Lambda}$ состоит из трёх значений: $\sigma_{ess}(\tilde{H}_{3\Lambda}) = \{0, -6J, -12J\}$, и для число трехмагнонных СС N имеет место соотношение $1 \leq N \leq 18$.

б). Если $\nu = 2$ и полный квазиимпульс системы $\Lambda = (0, 0)$, тогда существенный спектр оператора $\tilde{H}_{3\Lambda}$ состоит из единственного отрезка: $\sigma_{ess}(\tilde{H}_{3\Lambda}) = [0, -48J]$, и для число трехмагнонных СС N имеет место соотношение $0 \leq N \leq 17$.

с). Если $\nu = 2$ и полный квазиимпульс системы $\Lambda \neq (\pi, \pi)$ и $\Lambda \neq (0, 0)$, тогда существенный спектр оператора $\tilde{H}_{3\Lambda}$ состоит из объединений трех отрезков:

$$\sigma_{ess}(\tilde{H}_{3\Lambda}) = [-4J(6 - \cos \frac{\Lambda_1^1}{2} - \cos \frac{\Lambda_1^2}{2} - \cos \frac{\Lambda_2^1}{2} - \cos \frac{\Lambda_2^2}{2} - \cos \frac{\Lambda_3^1}{2} -$$

$-\cos \frac{\Lambda_3^2}{2}), -4J(6 + \cos \frac{\Lambda_1^1}{2} + \cos \frac{\Lambda_1^2}{2} + \cos \frac{\Lambda_2^1}{2} + \cos \frac{\Lambda_2^2}{2} + \cos \frac{\Lambda_3^1}{2} +$
 $+\cos \frac{\Lambda_3^2}{2})] \cup [-4J(2 - \cos \frac{\Lambda_1^1}{2} - \cos \frac{\Lambda_1^2}{2}) + z_{\Lambda_2} + z_{\Lambda_3}, -4J\left(2 + \cos \frac{\Lambda_1^1}{2} + \cos \frac{\Lambda_1^2}{2}\right) +$
 $+z_{\Lambda_2} + z_{\Lambda_3}] \cup [-4J(4 - \cos \frac{\Lambda_1^2}{2} - \cos \frac{\Lambda_2^1}{2} - \cos \frac{\Lambda_2^2}{2} - \cos \frac{\Lambda_3^1}{2} - \cos \frac{\Lambda_3^2}{2}) + z_{\Lambda_1}, -$
 $-4J(4 + \cos \frac{\Lambda_1^2}{2} + \cos \frac{\Lambda_2^1}{2} + \cos \frac{\Lambda_2^2}{2} + \cos \frac{\Lambda_3^1}{2} + \cos \frac{\Lambda_3^2}{2}) + z_{\Lambda_1}]$ и для число
 трехмагнанных СС N имеет место соотношение $1 \leq N \leq 27$.

Теорема 4. а). Если $\nu = 3$ и полный квазиимпульс системы $\Lambda = (\pi, \pi, \pi)$, тогда существенный спектр оператора $\tilde{H}_{3\Lambda}$ состоит из четырех значений: $\sigma_{ess}(\tilde{H}_{3\Lambda}) = \{0, -36J, -8J, -14J\}$, и для число трехмагнанных СС N имеет место соотношение $1 \leq N \leq 26$.

б). Если $\nu = 3$ и полный квазиимпульс системы $\Lambda = (0,0,0)$, тогда существенный спектр оператора $\tilde{H}_{3\Lambda}$ состоит из единственного отрезка: $\sigma_{ess}(\tilde{H}_{3\Lambda}) = [0, -72J]$, и для число трехмагнанных СС N имеет место соотношение $0 \leq N \leq 25$.

с). Если $\nu = 3$ и полный квазиимпульс системы $\Lambda \neq (\pi, \pi, \pi)$ и $\Lambda \neq (0,0,0)$, тогда существенный спектр оператора $\tilde{H}_{3\Lambda}$ состоит из объединений трех отрезков:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{ess}(\tilde{H}_{3\Lambda}) = & [-4J\left(9 - \sum_{i=1}^3 \cos \frac{\Lambda_1^i}{2} - \sum_{i=1}^3 \cos \frac{\Lambda_2^i}{2} - \sum_{i=1}^3 \cos \frac{\Lambda_3^i}{2}\right), \\
 & -4J(9 + \sum_{i=1}^3 \cos \frac{\Lambda_1^i}{2} + \sum_{i=1}^3 \cos \frac{\Lambda_2^i}{2} - \sum_{i=1}^3 \cos \frac{\Lambda_3^i}{2} + \sum_{i=1}^3 \cos \frac{\Lambda_3^i}{2})] \cup \\
 & \cup [-4J\left(3 - \sum_{i=1}^3 \cos \frac{\Lambda_1^i}{2}\right) + z_{\Lambda_2} + z_{\Lambda_3}, \\
 & -4J\left(3 + \sum_{i=1}^3 \cos \frac{\Lambda_1^i}{2}\right) + z_{\Lambda_2} + z_{\Lambda_3}] \cup \\
 & \cup [-4J\left(6 - \sum_{i=1}^3 \cos \frac{\Lambda_2^i}{2} - \sum_{i=1}^3 \cos \frac{\Lambda_3^i}{2}\right) + z_{\Lambda_1},
 \end{aligned}$$

$$-4J(6 + \sum_{i=1}^3 \cos \frac{\Lambda_2^i}{2} + \sum_{i=1}^3 \cos \frac{\Lambda_3^i}{2}) + z_{\Lambda_1}],$$

и для число трехмагнонных СС N имеет место соотношение $1 \leq N \leq 26$, где

z_{Λ_1} , z_{Λ_2} и z_{Λ_3} некоторые конкретные числа и

$\Lambda_1 = (\Lambda_1^1, \Lambda_1^2, \Lambda_1^3) \in T^3$, $\Lambda_2 = (\Lambda_2^1, \Lambda_2^2, \Lambda_2^3) \in T^3$ и $\Lambda_3 = (\Lambda_3^1, \Lambda_3^2, \Lambda_3^3) \in T^3$.

Список литературы

1. Van Himbergen J.E., and J. A. Tjon J. A. Three-Magnon Bound States in the Two-Dimensional Isotropic and Anisotropic Heisenberg Ferromagnet. // Physica A. 1976.V. 82, P. 389-416. [https://doi.org/10.1016/0378-4371\(76\)90015-7](https://doi.org/10.1016/0378-4371(76)90015-7).

2. Tashpulatov S. M. Structure of Essential Spectrum and Discrete Spectrum of the Energy Operator of Three-Magnon Systems in the Isotropic Ferromagnetic Non-Heisenberg Model with Spin One and Nearest-Neighbor Interactions. // Journal of Applied Mathematics and Physics., 2019.V. 7, № 4. P. 874-899. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-49763-7>.

References

1. Van Himbergen J.E., and J. A. Tjon J. A. Three-Magnon Bound States in the Two-Dimensional Isotropic and Anisotropic Heisenberg Ferromagnet. // Physica A. 1976.V. 82, P. 389-416. [https://doi.org/10.1016/0378-4371\(76\)90015-7](https://doi.org/10.1016/0378-4371(76)90015-7).

2. Tashpulatov S. M. Structure of Essential Spectrum and Discrete Spectrum of the Energy Operator of Three-Magnon Systems in the Isotropic Ferromagnetic Non-Heisenberg Model with Spin One and Nearest-Neighbor Interactions. // Journal of Applied Mathematics and Physics., 2019.V. 7, № 4. P. 874-899. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-49763-7>.