

DOI: 10.58168/OpEq2025_246-249

УДК 517.9

**ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ОДНОГО ЛИНЕЙНОГО
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ СО СКАЛЯРНЫМ
ПРОИЗВЕДЕНИЕМ В ПРАВОЙ ЧАСТИ**

THE CAUCHY PROBLEM FOR A LINEAR DIFFERENTIAL EQUATION WITH
A SCALAR PRODUCT ON THE RIGHT SIDE

Усков Владимир Игоревич

кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры
математики

Чеканина Ольга Юрьевна

ассистент кафедры математики

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный лесотехнический университет им.
Г.Ф. Морозова», г. Воронеж, Россия

Uskov Vladimir Igorevich

PhD in Physics and Mathematical, Senior Lecturer at the Department of Mathematics

Chekanina Olga Yurievna

Assistant of the Department of Mathematics

Voronezh State Forestry University named after G.F. Morozov, Voronezh, Russia

Аннотация. Рассматривается задача Коши для неоднородного дифференциального уравнения первого порядка с функционалом-скалярным произведением от искомой функции в правой части. Получен результат о существовании, единственности решения; найдено это решение в аналитическом виде.

Abstract. The Cauchy problem for an inhomogeneous first-order differential equation with a functional is a scalar product of the desired function on the right side.

The result about the existence and uniqueness of the solution is obtained; this solution is found in an analytical form.

Ключевые слова: задача Коши, дифференциальное уравнение, скалярное произведение, решение.

Keywords: Cauchy problem, differential equation, scalar product, solution.

Постановка задачи

Рассматривается задача Коши:

$$\frac{du}{dt} = \langle a, u(t) \rangle + b + f(t), \quad (1)$$

$$u(0) = g, \quad (2)$$

где заданы постоянные векторы $a, b, g \in \mathbf{R}^n$, вектор-функция $f(t) \in \mathbf{R}^n$, $t \in \mathfrak{T} = [0; T]$. Символом $\langle, \rangle$ обозначено скалярное произведение в $\mathbf{R}^n$.

Требуется найти функцию $u(t)$, дифференцируемую и удовлетворяющую (1), (2) при каждом $t \in \mathfrak{T}$.

Будем предполагать, что $\langle a, b \rangle \neq 0$.

Уравнениями (1) описывается процесс метаногенеза при изменении условий теплообмена с окружающей средой, межотраслевой баланс (модель В. Леонтьева), термомеханическое поведение полимеров и т.д.

Вспомогательные утверждения

Рассмотрим оператор $D(\cdot) = \langle a, (\cdot) \rangle + b$.

Утверждение 1. Оператор D линейен.

Доказательство. Возьмем элементы $v, w \in \mathbf{R}^n$ и скаляр $c \in \mathbf{R}$. Имеем:

$$D(v + w) = \langle a, (v + w) \rangle + b = \langle a, v \rangle + \langle a, w \rangle + b = Dv + Dw,$$

что влечет аддитивность оператора D .

Далее, $D(cv) = \langle a, cv \rangle + b = c \langle a, v \rangle + b = cDv$, что влечет однородность.

Тем самым, линейность доказана.

Утверждение 2. Оператор D ограничен.

Доказательство. Воспользовавшись определением ограниченного оператора и неравенством Коши-Буняковского [1] имеем:

$$\|Dv\| = \|\langle a, v \rangle b\| = |\langle a, v \rangle| \|b\| \leq \|a\| \|v\| \|b\| = \mu \|v\|$$

с постоянной $\mu = \|a\| \|b\| > 0$, что и влечет ограниченность оператора D .

Утверждение 3. Степень D^i , $i = 1, 2, \dots$, оператора D определяется формулой:

$$D^i v = \langle a, b \rangle^{i-1} \langle a, v \rangle b.$$

Доказательство. Применим метод математической индукции по i . При $i = 1$ утверждение очевидно верно. Пусть оно верно для $i = k$. Тогда для $i = k + 1$ имеем:

$$\begin{aligned} D^{k+1} v &= D(D^k v) = \langle a, D^k v \rangle b = \langle a, b \rangle^{k-1} \langle a, v \rangle \langle a, b \rangle b = \\ &= \langle a, b \rangle^k \langle a, v \rangle b, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Утверждение 4. Операторная экспонента e^{tD} определяется формулой:

$$e^{tD} v = v + \frac{\langle a, v \rangle}{\langle a, b \rangle} (e^{\langle a, b \rangle t} - 1) b.$$

Доказательство. Разложим операторную экспоненту в ряд Маклорена и воспользуемся предыдущим утверждением:

$$\begin{aligned} e^{tD} v &= v + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t^i}{i!} D^i v = v + \langle a, v \rangle \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t^i}{i!} \langle a, b \rangle^{i-1} b = \\ &= v + \frac{\langle a, v \rangle}{\langle a, b \rangle} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t^i}{i!} \langle a, b \rangle^i b = v + \frac{\langle a, v \rangle}{\langle a, b \rangle} (e^{\langle a, b \rangle t} - 1) b, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Решение задачи (1), (2)

Применив утверждения выше и результаты монографии С.Г. Крейна [2], получим следующий результат.

Теорема. Пусть $f(t)$ непрерывна. Тогда решение задачи (1), (2) существует, единственно и определяется формулой:

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t), \quad (3)$$

где

$$u_1(t) = g + \frac{\langle a, g \rangle}{\langle a, b \rangle} (e^{\langle a, b \rangle t} - 1)b,$$

$$u_2(t) = \int_0^t f(s) ds + \int_0^t \frac{\langle a, f(s) \rangle}{\langle a, b \rangle} (e^{\langle a, b \rangle (t-s)} - 1)b ds.$$

Список литературы

1. Функциональный анализ. – Под общ. ред. С.Г. Крейна. – М.: Наука, 1972. – 544 с.
2. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1967. – 464 с.

References

1. Functional analysis. – Under the general editorship of S.G. Krein. – M.: Nauka, 1972. – 544 p.
2. Krein S.G. Linear differential equations in a Banach space. Moscow: Nauka Publ., 1967, 464 p.