

DOI: 10.58168/OpEq2025_250-263

УДК 539.3+519.65

**ПРИМЕНЕНИЕ БЫСТРЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ
ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ
ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ**
APPLICATION OF FAST EXPANSIONS TO STUDY THE STRESS STATE
OF A RECTANGULAR PLATE ON AN ELASTIC BASE

Чернышов Александр Данилович

доктор физико-математических наук, профессор,
профессор кафедры высшей математики, ВГУИТ, г. Воронеж, Россия

Горайнов Виталий Валерьевич

кандидат физико-математических наук, доцент,
доцент кафедры прикладной математики и механики, ВГТУ, г. Воронеж, Россия

Никифорова Ольга Юрьевна

старший преподаватель кафедры высшей математики
ВГУИТ, г. Воронеж, Россия

Chernyshov Alexander Danilovich

Dr. of Physical and Mathematical Sciences, Professor,
Professor of the Department of Higher Mathematics
Voronezh State University of Engineering Technologies, Voronezh, Russia

Goryainov Vitaly Valerievich

PhD. of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor at the Department of Applied Mathematics and Mechanics
Voronezh State Technical University, Voronezh, Russia

Nikiforova Olga Yurievna

Senior Lecturer of the Department of Higher Mathematics
Voronezh State University of Engineering Technologies, Voronezh, Russia

Аннотация. Поставленная задача решена в аналитическом виде методом универсальных быстрых разложений. Проведено сравнение полученного приближенного аналитического решения с тестовым, исследована погрешность определения прогиба пластины. Установлено, что при использовании граничной функции шестого порядка и только одного члена у косинусов и одного члена у синусов в рядах Фурье в универсальных быстрых разложениях точность полученного решения значительно превышает точность задания входных параметров задачи, определяемой концепцией сплошной среды. В этом случае приближенное аналитическое решение формально можно считать точным.

Abstract. The problem is solved in analytical form using the method of universal fast expansions. The obtained approximate analytical solution is compared with the test one, the error in determining the plate deflection is investigated. It is found that when using a sixth-order boundary function and only one term in the cosines and one term in the sines in the Fourier series in universal fast expansions, the accuracy of the obtained solution significantly exceeds the accuracy of specifying the input parameters of the problem determined by the concept of a continuous medium. In this case, the approximate analytical solution can formally be considered exact.

Ключевые слова: пластина, бигармоническое уравнение, прогиб, крутящий и изгибающие моменты, перерезывающие силы, компоненты тензора напряжений, универсальные быстрые разложения, высокая точность.

Keywords: plate, biharmonic equation, deflection, torsional and bending moments, shear forces, stress tensor components, universal fast expansions, high accuracy.

Уравнения равновесия для прямоугольной пластины на упругом основании запишем в виде неоднородного бигармонического уравнения [1]

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{\kappa_0}{D} w = \frac{q(x, y)}{D}, \quad (x, y) \in \Omega_{\square} \quad (x \in [-a, a], y \in [-b, b]). \quad (1)$$

Здесь $w(x, y)$ - вертикальное перемещение пластины, $q(x, y)$ – переменная поперечная нагрузка на поверхность, κ_0 – коэффициент упругой постели, D – цилиндрическая жесткость пластины, вычисляемая по формуле $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$, где h – толщина пластины, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона.

На границах пластины $\Gamma_\square$ зададим $w(x, y)$ и нормальные к $\Gamma_\square$ производные

$$\begin{aligned} w|_{x=-a} &= \varphi_1(y), \quad w|_{y=-b} = \varphi_2(x), \quad w|_{x=a} = \varphi_3(y), \quad w|_{y=b} = \varphi_4(x), \\ \frac{\partial w}{\partial x}\bigg|_{x=-a} &= \psi_1(y), \quad \frac{\partial w}{\partial y}\bigg|_{y=-b} = \psi_2(x), \quad \frac{\partial w}{\partial x}\bigg|_{x=a} = \psi_3(y), \quad \frac{\partial w}{\partial y}\bigg|_{y=b} = \psi_4(x), \\ \left(w(x, y), \varphi_1(y), \varphi_3(y), \varphi_2(x), \varphi_4(x), \right. & \\ \left. \psi_1(y), \psi_3(y), \psi_2(x), \psi_4(x), q(x, y) \right) &\in C^{(8)}(\Omega_\square), \quad (x, y) \in \Omega_\square. \end{aligned} \quad (2)$$

Граничные условия (2) означают, что на $\Gamma_\square$ задано вертикальное смещение материальных точек пластины и упругий поворот краев пластины. Подобные задачи особенно сложны из-за присутствия в них производных как четного, так и нечетного порядков. Входными данными являются размеры пластины (a, b) и функции на границе:

$$\varphi_i, \psi_i, \quad i = 1 \div 4. \quad (3)$$

При рассмотрении многомерных задач для получения аналитического гладкого решения возникает проблема согласования входных данных задачи (3). Уравнения совместности получаются после следующих рассуждений. Из непрерывности перемещений в угловых точках пластины получаем первые четыре условия совместности

$$\begin{aligned} w(-a, -b) &= \varphi_1(-b) = \varphi_2(-a), \quad w(a, -b) = \varphi_2(a) = \varphi_3(-b), \\ w(a, b) &= \varphi_3(b) = \varphi_4(a), \quad w(-a, b) = \varphi_4(-a) = \varphi_1(b). \end{aligned} \quad (4)$$

Кроме (4) в угловых точках должны выполняться условия непрерывности вторых смешанных производных

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right|_{x=-a, y=-b} &= \psi'_1(-b) = \psi'_2(-a), \quad \left. \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right|_{x=a, y=-b} = \psi'_3(-b) = \psi'_2(a), \\ \left. \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right|_{x=a, y=b} &= \psi'_3(b) = \psi'_4(a), \quad \left. \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right|_{x=-a, y=b} = \psi'_1(b) = \psi'_4(-a). \end{aligned} \quad (5)$$

Штрихом в (5) обозначены производные по той переменной, от которой зависит соответственная функция.

К условиям совместности (4) и (5) добавим условия, связывающие производные от функций для перемещений, заданных в (2), с функциями для производных по нормали к границе $\Gamma_{\square}$ от перемещений из (2), т.е.

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_{x=-a, y=-b} &= \left. \frac{d\varphi_1(y)}{dy} \right|_{y=-b} = \psi_2(-a), \quad \left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_{x=a, y=-b} = \left. \frac{d\varphi_3(y)}{dy} \right|_{y=-b} = \psi_2(a), \\ \left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_{x=a, y=b} &= \left. \frac{d\varphi_3(y)}{dy} \right|_{y=b} = \psi_4(a), \quad \left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_{x=-a, y=b} = \left. \frac{d\varphi_1(y)}{dy} \right|_{y=b} = \psi_4(-a), \\ \left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{x=-a, y=-b} &= \left. \frac{d\varphi_2(x)}{dx} \right|_{x=-a} = \psi_1(-b), \quad \left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{x=a, y=-b} = \left. \frac{d\varphi_2(x)}{dx} \right|_{x=a} = \psi_3(-b), \\ \left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{x=a, y=b} &= \left. \frac{d\varphi_4(y)}{dy} \right|_{y=b} = \psi_3(b), \quad \left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{x=-a, y=b} = \left. \frac{d\varphi_4(x)}{dx} \right|_{y=b} = \psi_1(b). \end{aligned} \quad (6)$$

Равенства (4) - (6) будем называть условиями совместности граничных условий. Если же хотя бы одно из условий (4) - (6) не выполняется, то в углах будем иметь разрывы и тогда нельзя будет дифференцировать ряды Фурье для разрывных функций, т.е. нельзя их будет подставлять в дифференциальное уравнение равновесия упругой пластины (1). В дальнейшем будем полагать, что все условия согласований (4) - (6) выполнены. Критерием существования невыполненных условий совместности является большая неустранимая погрешность в угловых точках.

Неизвестное перемещение $w(x, y)$ представим универсальным быстрым разложением [2] с граничной функцией не ниже четвертого порядка, так как дифференциальное уравнение (1) равновесия пластины имеет четвертый порядок

$$w(x, y) = M_6(x, y) + a_0(y) + \sum_{m=1}^{N_1-1} \left(a_m(y) \cos m\pi \frac{x}{a} + b_m(y) \sin m\pi \frac{x}{a} \right). \quad (7)$$

Здесь $N_1 - 1$ – количество членов в ряде Фурье, граничная функция $M_6(x, y)$ имеет вид

$$M_6(x, y) = \sum_{q=0}^6 A_q(y) P_q(x), \quad (8)$$

где $A_q(y)$ некоторые функции от переменной y , $P_q(x)$ специального вида полиномы от переменных x [2]

$$\begin{aligned} P_0(x) &= \frac{x}{2a}, \quad P_1(x) = \frac{x^2}{4a}, \quad P_2(x) = \frac{x^3}{12a} - \frac{ax}{12}, \quad P_3(x) = \frac{x^4}{48a} - \frac{ax^2}{24}, \\ P_4(x) &= \frac{x^5}{240a} - \frac{ax^3}{72} + \frac{7a^3x}{720}, \quad P_5(x) = \frac{x^6}{1440a} - \frac{ax^4}{288} + \frac{7a^3x^2}{1440}, \\ P_6(x) &= \frac{1}{1440} \left(\frac{x^7}{7a} - ax^5 + \frac{7a^3x^3}{3} - \frac{31a^5x}{21} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

В (7) коэффициенты a_0, a_m, b_m вычисляются интегральными формулами Фурье по переменной x . Функции $A_q(y)$ находятся из выражения [2]

$$A_q(y) = w^{(q)}(a, y) - w^{(q)}(-a, y), \quad q = 0 \div 6. \quad (10)$$

Равенство (10) удобно использовать, когда производные $w^{(q)}(\pm a, y)$ на концах отрезка $[-a, a]$ известны, т.е. когда $w(x, y)$ известная функция, либо $A_q(y)$ находится из граничных условий, либо из ДУ равновесия пластины. Формула (10) может быть модифицирована к более совершенному виду

$$A_q(y) = w^{(q)}(a(1-\varepsilon), y) - w^{(q)}(-a(1-\varepsilon), y), \quad q = 0 \div 6. \quad (11)$$

где ε – малая величина, которую следует задавать произвольно, но меньше погрешности используемых физических величин, определяемых концепцией сплошности среды.

Разложение (7) позволяет свести задачу с двумя переменными (x, y) к задаче о нахождении коэффициентов $A_0 \div A_6$, a_0 , a_m , b_m , $m = 1 \div N_1 - 1$ с одной переменной y . Для этого подставим быстрое разложение (7) в граничные условия (2) и дифференциальное уравнение (1). Из граничных условий (2) найдем неизвестные $A_0 \div A_3$. Для определения остальных неизвестных функций получим замкнутую систему $4 + 2(N_1 - 1)$ дифференциальных уравнений 4-го порядка каждое. Далее каждую из неизвестных функций представим универсальным быстрым разложением по переменной y с граничной функцией шестого порядка

$$\begin{aligned}
 A_{4j}(y) &= W_{A0j} \frac{y}{2b} + W_{A1j} \frac{y^2}{4b} + W_{A2j} \frac{1}{12} \left(\frac{y^3}{b} - by \right) + W_{A3j} \frac{1}{12} \left(\frac{y^4}{4b} - b \frac{y^2}{2} \right) + \\
 &+ W_{A4j} \frac{1}{24} \left(\frac{y^5}{10b} - b \frac{y^3}{3} + y \frac{7b^3}{30} \right) + w_{A0j} + \sum_{n=1}^{N_2-1} c_{Ajn} \cos n\pi \frac{y}{b} + \sum_{n=1}^{N_2-1} s_{Ajn} \sin n\pi \frac{y}{b} + \\
 &+ W_{A5j} \left(\frac{y^6}{1440b} - \frac{by^4}{288} + \frac{7b^3y^2}{1440} \right) + W_{A6j} \left(\frac{y^7}{7b} - by^5 + \frac{7b^3y^3}{3} - \frac{31b^5y}{21} \right), \quad j = 4 \div 6, \\
 a_0(y) &= W_0 \frac{y}{2b} + W_1 \frac{y^2}{4b} + W_2 \frac{1}{12} \left(\frac{y^3}{b} - by \right) + W_3 \frac{1}{12} \left(\frac{y^4}{4b} - b \frac{y^2}{2} \right) + \\
 &+ W_4 \frac{1}{24} \left(\frac{y^5}{10b} - b \frac{y^3}{3} + y \frac{7b^3}{30} \right) + w_0 + \sum_{n=1}^{N_2-1} c_n \cos n\pi \frac{y}{b} + \sum_{n=1}^{N_2-1} s_n \sin n\pi \frac{y}{b} + \\
 &+ W_5 \left(\frac{y^6}{1440b} - \frac{by^4}{288} + \frac{7b^3y^2}{1440} \right) + W_6 \left(\frac{y^7}{7b} - by^5 + \frac{7b^3y^3}{3} - \frac{31b^5y}{21} \right), \\
 a_m(y) &= A_{0m} \frac{y}{2b} + A_{1m} \frac{y^2}{4b} + A_{2m} \frac{1}{12} \left(\frac{y^3}{b} - by \right) + A_{3m} \frac{1}{12} \left(\frac{y^4}{4b} - b \frac{y^2}{2} \right) + \\
 &+ A_{4m} \frac{1}{24} \left(\frac{y^5}{10b} - b \frac{y^3}{3} + y \frac{7b^3}{30} \right) + a_{0m} + \sum_{n=1}^{N_2-1} c_{am,n} \cos n\pi \frac{y}{b} + \sum_{n=1}^{N_2-1} s_{am,n} \sin n\pi \frac{y}{b} +
 \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
& + A_{5m} \left(\frac{y^6}{1440b} - \frac{by^4}{288} + \frac{7b^3y^2}{1440} \right) + A_{6m} \left(\frac{y^7}{7b} - by^5 + \frac{7b^3y^3}{3} - \frac{31b^5y}{21} \right), \\
b_m(y) = & B_{0m} \frac{y}{2b} + B_{1m} \frac{y^2}{4b} + B_{2m} \frac{1}{12} \left(\frac{y^3}{b} - by \right) + B_{3m} \frac{1}{12} \left(\frac{y^4}{4b} - b \frac{y^2}{2} \right) + \\
& + B_{4m} \frac{1}{24} \left(\frac{y^5}{10b} - b \frac{y^3}{3} + y \frac{7b^3}{30} \right) + b_{0m} + \sum_{n=1}^{N_2-1} c_{bm,n} \cos n\pi \frac{y}{b} + \sum_{n=1}^{N_2-1} s_{bm,n} \sin n\pi \frac{y}{b} + \\
& + B_{5m} \left(\frac{y^6}{1440b} - \frac{by^4}{288} + \frac{7b^3y^2}{1440} \right) + B_{6m} \left(\frac{y^7}{7b} - by^5 + \frac{7b^3y^3}{3} - \frac{31b^5y}{21} \right), \quad m = 1 \div N_1 - 1.
\end{aligned}$$

В (12) $N_2 - 1$ - количество членов в ряде Фурье по переменной y . Представление неизвестных функций в виде (12) позволяет вычислять производные от них до шестого порядка включительно на всем отрезке $y \in [-b, b]$, включая и границу. Таким образом, решение задачи сводится к нахождению $(4 + 2(N_1 - 1)) \cdot (8 + 2(N_2 - 1))$ постоянных коэффициентов, определяющих неизвестные функции. Для их нахождения составим линейную алгебраическую систему из $(4 + 2(N_1 - 1)) \cdot (8 + 2(N_2 - 1))$ уравнений и решаем ее в программе Maple. Решение линейной алгебраической системы подставляем в повторные быстрые разложения (12), а затем в разложение (7). В итоге имеем приближенное аналитическое решение задачи (1), (2).

Решение задачи (1), (2) можно представить в явном виде, если задать функции $q(x, y)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_4(x)$, $\psi_2(x)$, $\psi_4(x)$, $x \in [-a, a]$. В качестве примера функции из (2) зададим следующим образом

$$\begin{aligned}
\varphi_1(y) = \varphi_3(y) = \varphi_2(x) = \varphi_4(x) &= 0, \\
\psi_1(y) = 2Qa(y^2 - b^2)e^{(y-a)/3}, \quad \psi_3(y) &= -2Qa(y^2 - b^2)e^{(y+a)/3}, \\
\psi_2(x) = 2Qb(x^2 - a^2)e^{(x-b)/3}, \quad \psi_4(x) &= -2Qb(x^2 - a^2)e^{(x+b)/3},
\end{aligned} \tag{13}$$

где Q – некоторая константа.

Нагрузку $q(x, y)$ в (1) запишем выражением

$$q(x, y) = - \left(\frac{D}{9} \left(\frac{16}{3} (y^2 - b^2) (x + 3) + \frac{16}{3} (x^2 - a^2) (y + 3) + \frac{4}{9} (x^2 - a^2) (y^2 - b^2) + \right. \right. \quad (14)$$

$$\left. \left. + 8(2y + 3)(2x + 3) \right) + \kappa_0 (x^2 - a^2) (y^2 - b^2) \right) Q e^{(x+y)/3}.$$

Зависимости (13) и (14) подобраны так, что выполняются все условия совместности (4) – (6). В данном случае задача (1), (2) имеет точное решение

$$w(x, y) = -Q(x^2 - a^2)(y^2 - b^2)e^{(x+y)/3} \quad (15)$$

Точное решение (15) позволяет исследовать погрешность решения краевой задачи (1), (2) путем сравнения с приближенным аналитическим решением (15), полученным методом универсальных быстрых разложений.

В вычислительных экспериментах, согласно оценкам, приведенных в [3,4], возьмем в рядах Фурье по одному члену у косинусов и у синусов, т.е. $N_1 = N_2 = 2$. Прогиб $w(x, y)$ пластины рассчитаем по формуле (7), а изгибающие и крутящий моменты, перерезывающие силы и компоненты напряжений вычислим по формулам [1]

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad M_y = -D \left(\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad M_{xy} = -M_{yx} = D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (15)$$

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right). \quad (16)$$

$$\tau_{xz} = \frac{3}{2} \frac{Q_x}{h}, \quad \tau_{yz} = \frac{3}{2} \frac{Q_y}{h}, \quad \tau_{xy} = 6 \frac{M_{xy}}{h^2}, \quad \sigma_x = 6 \frac{M_x}{h^2}, \quad \sigma_y = 6 \frac{M_y}{h^2}. \quad (17)$$

Относительную погрешность прогиба (7), изгибающих и крутящих моментов (15), перерезывающих сил (16) и компонент напряжений (17), будем вычислять по формуле

$$\delta = |\Delta| / f_{\max} \cdot 100\%.$$

где Δ – абсолютная погрешность, $f_{\max}$ – максимальное значение исследуемого объекта.

Вычисления будем проводить при значениях $\kappa_0 = 10000$, $E = 10^{10}$, $\nu = 0.3$, $Q = 10^{-3}$, $\varepsilon = 10^{-10}$ м, $a = 1$ м, $b = 1$ м, $h = 0.05$ м. Прогиб $w(x, y)$ пластины, рассчитанный по формуле (7), изображен на рис. 1. Прогиб имеет плоскость симметрии, проходящую через диагональ квадрата с наиболее нагруженной вершиной. Максимальный прогиб пластины под нагрузкой (14) будет находиться не в центре, как при равномерном нагружении пластины, а смещен вдоль плоскости симметрии в сторону самой нагруженной вершины. Относительная погрешность вычислений прогиба $w(x, y)$ по сравнению с точным решением (15) показана на рис. 2. Из рис. 2 видно, что погрешность на границах области равна нулю, а максимальная погрешность достигается внутри области. Максимальный порядок относительной погрешности составляет $10^{-3}\%$.

На рис. 3 представлены распределения компонент напряжений в пластине. Из рис. 3а и рис. 3б видно, что в углах пластины $\sigma_x = \sigma_y = 0$. Наибольшее значение σ_x и σ_y достигается на сторонах $x = a$ и $y = b$ соответственно. Точки с максимальным значением σ_x и σ_y , расположены между серединами этих сторон и точкой $(a; b)$. В отличие от нормальных напряжений σ_x и σ_y касательные напряжения τ_{xz} , τ_{yz} и τ_{xy} , принимают свои максимальные значения не на сторонах, а в точке $(a; b)$ пластины (рис. 3в, рис. 3г и рис. 3д). Также из рис. 3 можно сделать вывод, что в прямоугольной пластине при нагрузке вида (14) из всех касательных напряжений наибольшее значение имеет τ_{xy} , которое на два порядка превосходят значения касательных напряжений τ_{xz} и τ_{yz} .

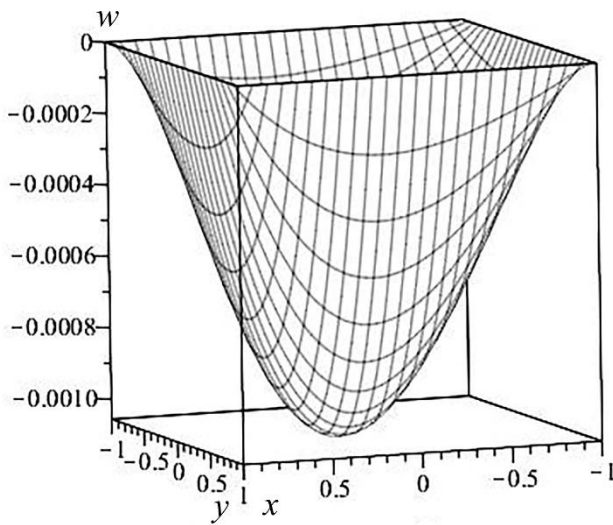


Рис. 1. Прогиб $w(x, y)$ пластины, рассчитанный по формуле (7)

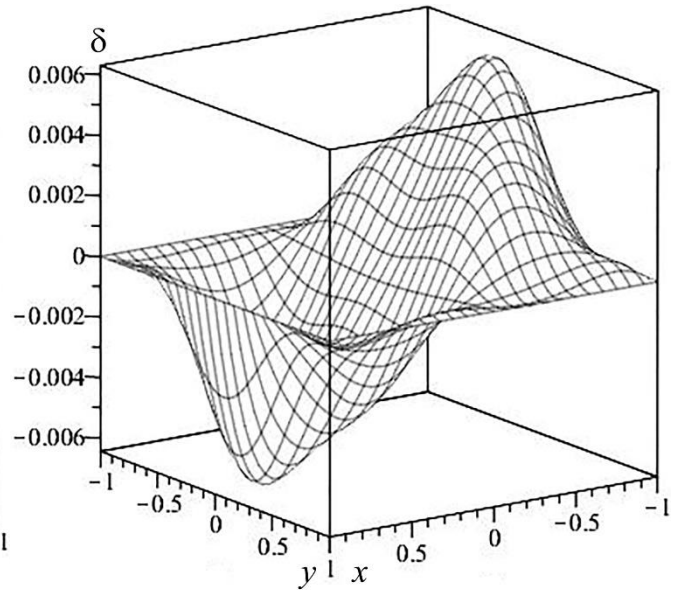
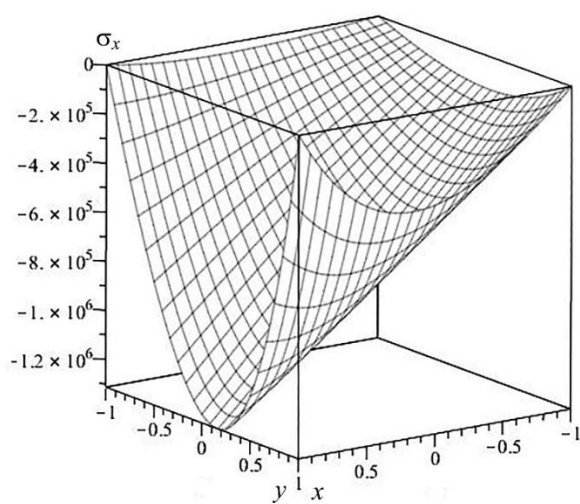
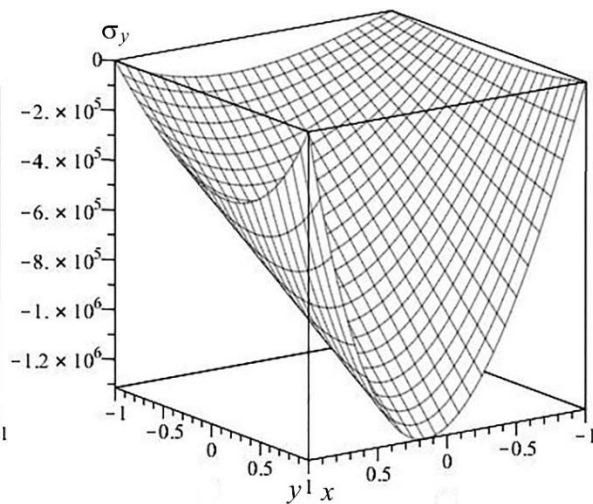


Рис. 2. Относительная погрешность вычислений прогиба в сравнении с точным решением (15)

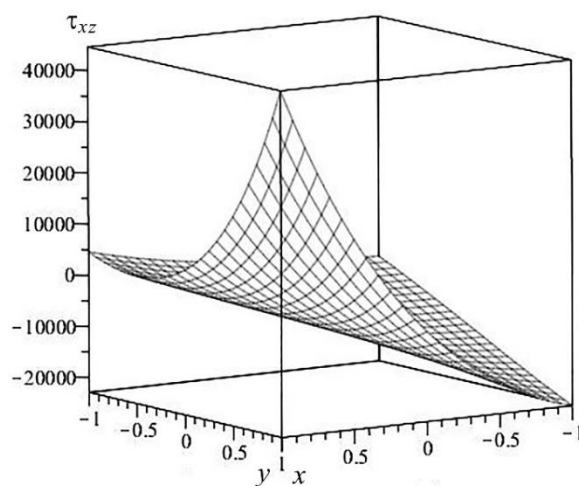
В заключении отметим, что универсальные быстрые разложения также эффективны как и быстрые синус-разложения, апробированные в работах [5-8]. При использовании в универсальных быстрых разложениях граничной функции шестого порядка достаточно учитывать в рядах Фурье один член у косинусов и один у синусов. Максимальный порядок относительной погрешности расчета прогиба пластины составит $10^{-3}\%$. Подобная малая погрешность позволяет формально считать полученное в статье приближенное аналитическое решение точным.



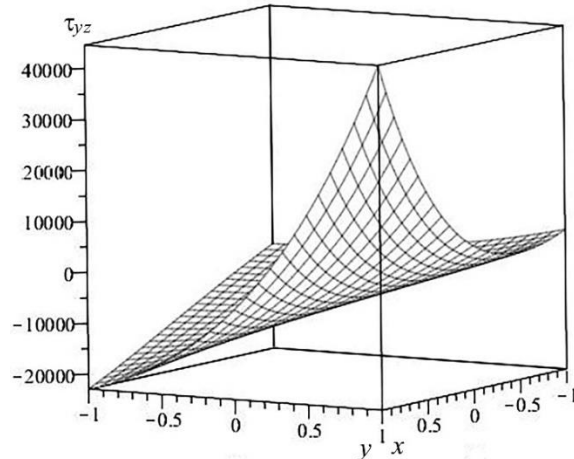
а)



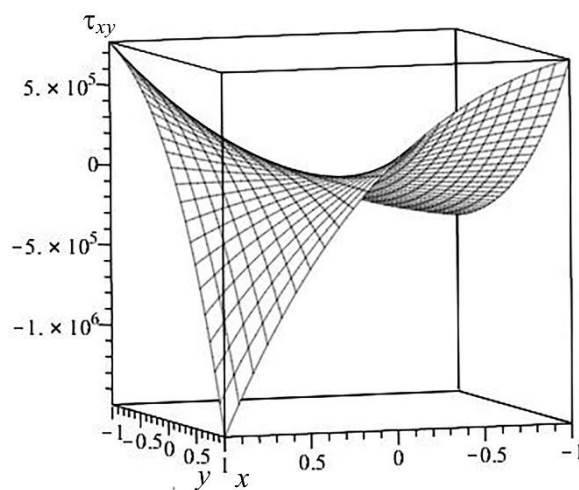
б)



в)



г)



д)

Рис. 3. Распределение компонент напряжений в пластине:

а) σ_x , б) σ_y , в) τ_{xz} , г) τ_{yz} , д) τ_{xy}

Полученное аналитическое решение при задании нагрузки на пластину и условий закрепления краев позволяет вычислить в любой точке перемещение, крутящий и изгибающие моменты, перерезывающие силы и компоненты тензора напряжений. Проведенные расчеты напряжений в прямоугольной пластине под действием специальной переменной нагрузки показали, что максимальные значения касательные напряжения τ_{xz} , τ_{yz} и τ_{xy} достигаются в точке $(a;b)$, а максимальные значения нормальных напряжений σ_x и σ_y достигаются на сторонах $x=a$ и $y=b$ соответственно и расположены между серединами этих сторон и точкой $(a;b)$.

Список литературы

1. Тимошенко С.П. Пластины и оболочки / С.П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер – М.: Наука. 1966. 636 с.
2. Chernyshov A.D. Universal fast expansion for solving nonlinear problems / A.D. Chernyshov, D.S. Saiko, E.N. Kovaleva// Journal of Physics: Conference Series. 2020. P. 012147.
3. Чернышов А.Д. Универсальные быстрые тригонометрические интерполяции для интегро-дифференциальных задач различного порядка / А.Д. Чернышов, О.Ю. Никифорова, В.В. Горяйнов, С.Ф. Кузнецов, И.Г. Рукин // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 4 (54). С. 57-70.
4. Чернышов А.Д. Применение универсальной быстрой тригонометрической интерполяции и экстраполяции для определения координат точки запуска летательного аппарата/ А.Д. Чернышов, О.Ю. Никифорова, В.В. Горяйнов, И.Г. Рукин //Журнал вычислительной математики и математической физики. 2024. Т. 64. № 7. С. 1183-1195.

5. Чернышов А.Д. Решение задачи о контактном тепловом сопротивлении между сжатыми шарами методом быстрых разложений / А.Д. Чернышов, В.М. Попов, А.С. Шахов, В.В. Горяйнов, А.П. Новиков // Тепловые процессы в технике. – 2012. – Т. 4. № 12. – С. 544-552.

6. Чернышов А.Д. Температурный режим при естественной конвекции термовязкой несжимаемой жидкости в емкости прямоугольной формы / А.Д. Чернышов, А.Н. Марченко, В.В. Горяйнов // Тепловые процессы в технике. – 2012. – Т. 4. № 11. – С. 482-486.

7. Чернышов А.Д. Решение одного нелинейного интегро-дифференциального уравнения методом быстрых разложений/ А.Д. Чернышов, В.В. Горяйнов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2012. № 4 (14). С. 105-112.

8. Попов В.М. Повышенная точность решения задачи о контактном термосопротивлении между сжатыми шарами методом быстрых разложений / В.М. Попов, А.С. Шахов, В.В. Горяйнов, О.А. Чернышов, А.П. Новиков // Тепловые процессы в технике. – 2014. – Т. 6. № 4. – С. 179-191.

References

1. Timoshenko S.P. Theory of plates and shells/ S.P. Timoshenko, S. Woinowsky-Krieger. – New York: McGraw-Hill, 1959

2. Chernyshov A.D. Universal fast expansion for solving nonlinear problems / A.D. Chernyshov, D.S. Saiko, E.N. Kovaleva // Journal of Physics: Conference Series. 2020. P. 012147.

3. Chernyshov A. D. Universal fast trigonometric interpolations for integro-differential problems of various orders / A. D. Chernyshov, O. Yu. Nikiforova, V. V. Goryainov, S. F. Kuznetsov, I. G. Rukin // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University named after I. Ya. Yakovlev. Series: Limit State Mechanics. 2022. No. 4 (54). P. 57-70.

4. Chernyshov A.D. Application of universal fast trigonometric interpolation and extrapolation for determining the launch point coordinates of a flight vehicle / A. D. Chernyshov, O. Yu. Nikiforova, V. V. Goryainov, I. G. Rukin // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2024. Vol. 64, Is. 7. P. 1461-1471.

5. Chernyshov A.D. Solution of the problem of contact thermal resistance between compressed spheres by the method of fast expansions / A.D. Chernyshov, V.M. Popov, A.S. Shakhov, V.V. Goryainov, A.P. Novikov // Thermal processes in engineering. - 2012. - V. 4. No. 12. - P. 544-552.

6. Chernyshov A.D. Temperature regime during natural convection of a thermoviscous incompressible fluid in a rectangular container / A.D. Chernyshov, A.N. Marchenko, V.V. Goryainov // Thermal processes in engineering. - 2012. - Vol. 4. No. 11. - P. 482-486.

7. Chernyshov A.D. Solution of one nonlinear integro-differential equation by the fast expansion method / A.D. Chernyshov, V.V. Goryainov // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University named after I. Ya. Yakovlev. Series: Limit State Mechanics. 2012. No. 4 (14). P. 105-112.

8. Popov V.M. Increased accuracy of solving the problem of contact thermal resistance between compressed spheres using the fast expansion method / V. M. Popov, A. S. Shakhov, V. V. Goryainov, O. A. Chernyshov, A. P. Novikov // Thermal processes in engineering. - 2014. - Vol. 6. No. 4. - P. 179-191.