DOI: 10.58168/MoInSyTe2024_74-80
УДК 004.9

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ РАУСА-ГУРВИЦА

А.В. Каневец[1], А.Г. Абрасимовская[1], А.Е. Анисимов[1], И.В. Скоркин[2]

[1]ФГБОУ ВО «Воронежский государственный лесотехнический университет имени Г.Ф. Морозова»
[2]АО «НИИ Космического приборостроения»

Аннотация. В работе дано определение алгебраического критерия устойчивости Рауса-Гурвица (Raus-Hurwitz). Рассматривается его принцип работы, примеры применения, достоинства, недостатки и свойства. В статье рассказывается о том, как критерии предоставляют определенный метод устойчивости системы на основе характеристического уравнения.

Ключевые слова: Принцип работы критерия устойчивости, определение критерия, уравнения степеней, примеры применения критерия, достоинства и недостатки.

ALGEBRAIC CRITERIA STABILITY ROUSE-HURWITZ

A.V. Kanevets[1], A.G. Abrasimovskaya[1], A.E. Anisimov[1], I.V. Scorkin[2]

[1]Voronezh State University of Forestry and Technologies named after G.F. Morozov
[2]JSC «Research Institute of Space Instrumentation»

Abstract. The paper gives a definition of the algebraic Routh-Hurwitz stability criterion. Its operating principle, examples of application, advantages, disadvantages and properties are considered. The article describes how the criteria provide a specific method of system stability based on the characteristic equation.

Key words: Operating principle of the stability criterion, definition of the criterion, power equations, examples of application of the criterion, advantages and disadvantages.

Введение

Начнем с того что нам нужно рассмотреть и разобраться в алгебраическом критерий устойчивости Рауса-Гурвица. Критерий стабильности Рауса-Гурвица это интересная математическая процедура, которая позволит нам оценить находятся ли какие либо корни линейного многочлена в правой полуплоскости. Таким образом это имеет очевидное применение в разработке систем управления, потому что мы знаем, что характеристическим уравнением для большинства фактически для всех линейных систем, является линейные многочлены и его корни определяют стабильность, производительность и характеристики системы. Но сам метод не указывает на степень стабильности или нестабильности, из-за этого эти критерии объединяют.

Критерий алгебраической устойчивости: описание, особенности и примеры

Теперь, когда мы поняли, о чем наша статья, давайте разберем определение критерия алгебраической устойчивости. Что же такое стабильность? Устойчивость представляет собой способность автоматического управления вернуться после недолгой внешней нагрузки к исходному состоянию. Достаточное условие устойчивости системы автоматического регулирования линейного уравнения - отрицание фактических частей всех корней характеристического уравнения. Тем самым, это можно найти из передаточной функции системы с замыкающим контуром, соединяющего вход и выход, приравнивая знаменатель функции к нулю.

Критерий Рауса - Гурвица получил наибольшее распространение среди других алгебраических критериев, он был предложен сначала Е.Раусом, потом А. Гурвицем, под конец 19 века.

Критерий устойчивости Гурвица: алгоритм расчета

Далее мы рассмотрим критерий устойчивости, предложенный Гурвицем. Если все коэффициенты i-го уравнения положительны, а все показатели до порядка n-1 больше 0, то система устойчивая. Далее посмотрим, как построить алгоритм Гурвица $\triangle$ с помозью следующих коэффициентов: Для старшего определителя первого порядка коэффициенты устанавливаются по диагонали в порядке увеличения индекса слева направо: $a_1 \dots a_n$. От каждого коэффициента на главной диагонали вертикально вверх записываются коэффициенты с последовательно возрастающими индексами, а вниз — коэффициенты с последовательно убывающими индексами. Кроме того, столбцы попеременно состоят из коэффициентов только с нечетными или только с четными индексами. Коэффициенты с индексом больше n и меньше 0 устанавливаются равными нулю. Определитель Гурвица — это диагональный определитель n-мерной квадратной матрицы:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & a_n \end{vmatrix}.$$

Рисунок 1 – Таблица Гурвица

Чтобы конкретная система автоматического управления была устойчивой, все диагональные миноры должны иметь положительный характер. Такие миноры называются определителями Гурвица. Для уравнений более высокого порядка, порядок определителя увеличивается, и фактический расчет становится более трудным. Критерий устойчивости Рауса-Гурвица лучше всего использовать для уравнений порядка 4, 5 или меньше.

Критерий устойчивости Рауса

Критерий устойчивости Рауса заключается в использовании специальной системы автоматического регулирования в виде алгоритма, с помощью которого таблица заполняется коэффициентами следующего уравнения:

Первая часть таблицы заполнена коэффициентами, которые имеют четные индексы характеристического уравнения. Вторая часть содержит коэффициенты с нечетными индексами. Число строк таблицы Рауса на одну выше порядка уравнения n+1. Остальные показатели таблицы определяются так:

$$C_{k,i} = C_{k+1,i-2} - r_i C_{k+1,i-1}$$

$$r_i = C_{1,i-2}/C_{1,i-1}$$

Для стабильной работы специальной системы автоматического управления таблицы Рауса, коэффициенты первых столбцов C_{11}, C_{12}, C_{13} … , должны иметь одинаковый знак и быть положительными при $a_0 > 0$.

$$C_{11} = a_0 > 0; C_{12} = a_1 > 0;\ C_{13} = a_2 > 0$$

Система считается неустойчивой, если в первом столбце коэффициенты не все положительны, а количество правых корней ровняется числу перемен знака.

Ri	i\k	1	2	3	4
-	1	$c_{11} = a_0$	$c_{21} = a_2$	$c_{31} = a_4$	…
-	2	$c_{12} = a_1$	$c_{22} = a_3$	$c_{32} = a_5$	…
$r_3 = c_{11}/cc_{12}$	3	$c_{13} = c_{21}\text{-}r_3c_{22}$	$c_{23} = c_{31}\text{-}r_3c_{32}$	$c_{33} = c_{41}\text{-}r_3c_{42}$	…
$r_3 = c_{11}/c_{12}$	4	$c_{14} = c_{22}\text{-}r_3c_{23}$	$c_{24} = c_{32}\text{-}r_4c_{33}$	$c_{34} = c_{42}\text{-}r_4c_{43}$	…
…	…	…	…	…	…

Рисунок 2 – Таблица Рауса

Давайте проанализируем уравнения разных порядков, которые мы уже обсуждали. Критерий стабильности линейных и квадратных уравнений предполагает, что в уравнение имеется положительный коэффициент и что это необходимое и достаточное условие. Следовательно, условие устойчивости: $a_0 > 0;\ a_1 > 0;\ a_2 > 0$.

Уравнение третьей степени имеет вид: $a_0s^3 + a_1s^2 + a_2s^2 + a_s = 0$.

Уравнение четвертой степени имеет вид: $a_0s^4 + a_1s^3 + a_2s^2 + a_3s + a_4 = 0$.

Все коэффициенты уравнения и определители Гурвица, должны быть положительными, что для устойчивости системы будет достаточно $\triangle_{n-1}, \triangle_{n-3}, \triangle_{n-5}, \dots$

Примеры применения критерия Рауса-Гурвица

№ 1. Построим главный определитель системы Рауса - Гурвица, характеризуем его следующим характерным уравнением:

$$a_4 \times s^4 + a_3 \times s^3 + a_2 \times s^2 + a_1 \times s + a_0 = 0$$

Используя правило составления основного определителя Рауса-Гурвица, мы получим:

$$\begin{vmatrix} a_3 & a_4 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_0 \end{vmatrix}.$$

№ 2. Исследование на стабильность нулевых решений уравнения

y''''+5y'''+13y''+19y'+10y=0

Составляем характеристическое уравнение

$$f(\lambda) = \lambda^4 + 5\lambda^3 + 13\lambda^2$$

Здесь a_0=1,a_1=5, a_2=13,a_3=19,a_4=10. Записываем диагональные миноры Гурвица:

$$\Delta_1 = 5 > 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 19 & 13 \end{vmatrix} = 46 > 0,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 19 & 13 & 5 \\ 0 & 10 & 19 \end{vmatrix} = 424 > 0,\ \Delta_4 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 19 & 13 & 5 & 1 \\ 0 & 10 & 19 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 4240 > 0,$$

Поэтому, $\triangle_1 > 0$, $\triangle_2 > 0$,$\triangle_3 > 0$,$\triangle_4 > 0$. Таким образом тривиальное решение уравнения y=0 абсолютно устойчиво. Вычисление возможно, организовать таким образом. Чтобы начать составить старший минор Гурвица, $\triangle_n$. по которому можно легко выписать все младшие миноры $\triangle_{n-1,}$ ... $\triangle_1$ а затем начинать вычисление последовательно $\triangle_1$, $\triangle_2$и т.д. Если встречается отрицательный минор, то решение неустойчиво и считать дальше считать не надо.

№ 3. Разберем систему с следующим уравнением: $s^3 + 2s^2 + 3s + 4 = 0$, а потом создаем таблицу Рауса-Гурвица:

$$\begin{array}{ccc} s^3 & 1 & 3 \\ s^2 & 2 & 4 \\ s^1 & \frac{10}{2} & 0 \\ s^0 & 4 & 0 \end{array}$$

Все элементы 1-го столбца положительные, а все элементы 2-го столбца не нулевые. Таким образом, система стабильна.

Достоинства и недостатки критерия Рауса-Гурвица

Преимуществом критерия Рауса является то, что он легко применяется вне независимости от порядка характеристического уравнения. Также можно пользоваться на компьютере. Недостаток заключается в том, что сложно определить уровень стабильности системы, то есть насколько она далека от предела устойчивости. Недостаток критерия Гурвица - это то, что он также менее конкретен. Достоинство в том что он на электронно-вычислительной машине удобен в реализации. Он часто используется для того, чтобы определить влияния автоматической системы на ее уровень устойчивости.

Критерий Рауса-Гурвица имеет некоторые свойства: его можно применять для систем, любого числа переменных и также можно применять только для линейных стационарных систем с постоянными коэффициентами. Но также этот критерий имеет свои ограничения, например: нельзя применять его в системах с задержкой, также нельзя применять его и в системах с нелинейными элементами.

Заключение

Подводя итог сказанного, можно сделать вывод что, алгебраические критерии Рауса-Гурвица - эффективный метод оценки устойчивости линейных систем. Анализируя характеристическое уравнение, можно определить степень устойчивой системы и неустойчивости. Критерий Рауса-Гурвица является тоже полезным инструментом для анализа устойчивости системы, что позволяет быть по разному использован в областях автоматики и управления.

Список литературы

1. Четаев Н.Г. Устойчивость движения. — Москва: Наука, 1965. — 234 с.

2. Гончаров А. А. Алгебраические критерии устойчивости систем дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1983 г.

3. Челевский Л. В. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. — М.: Наука, 1970.

4. Зубов В. И. Введение в теорию линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. — М.: Наука, 1971.

5. Самарский А. А. Теория дифференциальных уравнений математической физики. — М.: Наука, 1989.

6. Пестов О. Устойчивость движения. — М.: Физматлит, 2007.

7. Фраческини А. Л. Стабильность движения: приближенные методы. — М.: Мир, 1966.

8. Гурвиц М. К. On the Stabilization of Linear Systems. — Quarterly of Applied Mathematics, Том 10, Выпуск 2, 1952, с. 47-55.

9. Лакин С. В. Об устойчивости движения. — М.: Физматлит, 2003.

10. Гурвич М. М. Теория автоматического управления. 1960.

11. Гурвич Л. И. Автоматическое управление. 1970.

12. Завьялов В. Б. Автоматическое управление: лекции. 1970.

13. Красовский Ю.Б. Теория систем автоматического управления. 1960.

14. Лурье А. И. Анализ и синтез нелинейных систем автоматического управления. – М., 1980. – С. 150-200.

15. Полуэктов А.В., Макаренко Ф.В., Ягодкин А.С. Использование сторонних библиотек при написании программ для обработки статистических данных // Моделирование систем и процессов. – 2022. – Т. 15, № 2. – С. 33-41.

References

1. Chetaev N. G. Difficulty moving. - Moscow: Nauka, 1965. - 234 p.

2. Goncharov A. A. Algebraic criteria for the stability of systems of differential methods. - M.: Nauka, 1983.

3. Chelevsky L. V. Differential equations and calculus of variations. - M.: Nauka, 1970.

4. Zubov V. I. Introduction to the influence of linear differential equations with periodic coefficients. - M.: Nauka, 1971.

5. Samarsky A. A. Theory of differential results of mathematical physics. - M.: Nauka, 1989.

6. Pestov O. Stability of movement. - M.: Fizmatlit, 2007.

7. Frachini A. L. Motion stability: approximation methods. - M.: Mir, 1966.

8. Gurvits M. K. On the stabilization of linear systems. Quarterly Journal of Applied Mathematics, Volume 10, Issue 2, 1952, p. 47-55.

9. Lakin S. V. On the stability of motion. - M.: Fizmatlit, 2003.

10. Gurvich M. M. Theory of automatic control. 1960.

11. Gurvich L. I. Automatic control. 1970.

12. Zavyalov V. B. Automatic control: lecture. 1970.

13. Krasovsky Yu. B. Theory of automatic control systems 1960.

14. Lurie A. I. Analysis and synthesis of nonlinear automatic control systems. 1980. P. 150-200.

15. Poluektov A. V., Makarenko F. V., Yagodkin A. S. The use of third-party libraries when writing programs for processing statistical data // Modeling of systems and processes. – 2022. – Vol. 15, No. 2. – pp. 33-41.