

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЛЕСОТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Г.Ф. МОРОЗОВА»

ОПЕРАТОРНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕКОТОРЫЕ СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ
В ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКЕ

Материалы Международной открытой конференции

Воронеж, 21-23 апреля 2025 г.

Воронеж 2025

MINISTRY OF SCIENCE AND HIGHER EDUCATION
OF THE RUSSIAN FEDERATION
FEDERAL STATE BUDGET EDUCATIONAL INSTITUTION
OF HIGHER EDUCATION
«VORONEZH STATE UNIVERSITY OF FORESTRY AND TECHNOLOGIES
NAMED AFTER G. F. MOROZOV»

OPERATOR EQUATIONS AND SOME RELATED ISSUES
IN APPLIED MATHEMATICS

Materials of the International Open Conference

Voronezh, April 21-23, 2025

Voronezh 2025

УДК 517.938

О-60

О-60 Операторные уравнения и некоторые смежные вопросы в прикладной математике : материалы Международной открытой конференции, Воронеж, 21-23 апреля 2025 г. / отв. ред. В. В. Зенина ; М-во науки и высшего образования РФ, ФГБОУ ВО «ВГЛУ». – Воронеж, 2025. – 264 с. – URL: <https://vglu.ru/nauka/konferencii/2025/mezhdunarodnaya-otkrytaya-konferenciya-operatornyye-uravneniya-i-nekotorye-smeznyye-voprosy-v-prikladnoj-matematike/>. – Текст: электронный.

ISBN 978-5-7994-1220-3

Оригинальные статьи включают актуальные проблемы теории функций и функционального анализа, теории управления и информационных систем, дифференциальных, интегральных уравнений и их приложений, компьютерных технологий в процессах математического моделирования динамических систем, смежных проблем прикладной математики.

Материалы конференции предназначены для научных работников, аспирантов и студентов.

УДК 517.938

ISBN 978-5-7994-1220-3

© ФГБОУ ВО «ВГЛУ», 2025

Содержание

<i>Анарбекова Б.С., Жусупбаева Г. А.</i> Проблематика широкого внедрения искусственного интеллекта	5
<i>Баканач Е.А., Узрюмов С.А.</i> Программа для анализа размерно-качественных характеристик лесопродукции, заготовленной с применением многооперационных лесных машин	12
<i>Белоглазова Т.В., Евсюкова В.П., Шишкин М.С.</i> Задача о деформации объектов сетевой структуры	20
<i>Веневитина С.С., Сапронов И.В., Спирина Н.М.</i> Транспортная задача с ограничениями	27
<i>Гордиенко Т.П., Билялова Л.Р.</i> О некоторых прикладных моделях искусственного интеллекта	33
<i>Джумаев Б.М.</i> Об одной переопределенной системы уравнений в частных производных с комплексными периодическими коэффициентами	39
<i>Кабанко М.В., Мягченкова Е.Л.</i> Об одной «малой» алгебре операторов, действующих в весовых пространствах	44
<i>Калач А.В., Ковальчук А.А., Ряжских В.И.</i> Обработка массивов статистических данных большой размерности с обоснованием кластеризационного правила	50
<i>Карлова М.Ю., Фомина Т.П.</i> Статистический анализ динамики лесного сектора региона (на примере Липецкой области)	56
<i>Каятский А.В., Шишкина Э.Л.</i> Об операторах преобразования типа Векуа-Эрдейи-Лаундеса	64
<i>Кожмякин Н.С.</i> Исследование устойчивости преобразования радона к шуму при обнаружении прямых линий на изображениях	71
<i>Коротких А.С.</i> Геометрический метод анализа существования периодического решения дифференциального уравнения	87
<i>Корыпаева Ю.В., Таболин Д.А.</i> Применение метода последовательных уступок при решении военно-прикладной задачи многокритериальной оптимизации об оптимальном планировании ликвидации техногенной аварии	93
<i>Лукинских С.П., Королев Н.В.</i> Распространение лазерных пучков различного вида в слаботурбулентной атмосфере	103
<i>Максимов М.С., Хуснияров Р.М.</i> Анализ данных гидроразрыва пласта	113
<i>Мещерякова А.А., Грибанов А.А.</i> Разработка архитектуры автоматизированной системы управления лесопильным оборудованием	128
<i>Паутов Д.А., Кузнецов А.В.</i> Оценка работы харвестера на базе гусеничного экскаватора SANY SY245F в летнем и зимнем температурных режимах	139
<i>Полтарабатъко Р.С.</i> Числа Бернулли в криптографии	146
<i>Поляков С.И.</i> Комбинированное управление двухагрегатным весовым дозатором непрерывного действия	154
<i>Сапронов И.В., Зенина В.В., Смирнова Е.В.</i> Многопараметрическое семейство решений интегрального уравнения Вольтерра в банаховом пространстве	166

Седых И.А., Харитонов А.Е. Влияние цветковых пространств при распознавании объекта на изображении	179
Симонов А.Б., Симонов Б.В. Свойства смешанных модулей гладкости функций с монотонными коэффициентами Фурье	191
Симонов Б.В., Симонова И.Э. Соотношения между полными модулями гладкости в разных метриках	197
Симонова И.Э., Игонина Т.Р., Симонов Б.В. Уточнение соотношений между модулями гладкости в разных метриках	206
Слободин А.Д., Селиванов В.Ф., Иванов А.В., Хвостов А.А. Моделирование гидродинамики воздушных потоков в газовой промышленной печи для оценки температурного профиля поверхности объекта	212
Солонченко Р.Е. Топологический критерий перколяции и обобщение теоремы Харриса–Кестена	218
Спирина Н.М., Сапронов И.В., Веневитина С.С. Приближенное решение полулинейного параболического уравнения	225
Тарицына А.С., Щеголева Л.В. Применение роботизированного манипулятора для задач искусственного лесовосстановления в районах крайнего севера	232
Ташпулатов С.М. Спектр и связанные состояния оператора энергии трех магнитных систем в модели Гейзенберга в двумерном и трехмерном решетке	240
Усков В.И., Чеканина О.Ю. Задача Коши для одного линейного дифференциального уравнения со скалярным произведением в правой части	246
Чернышов А.Д., Горайнов В.В., Никифорова О.Ю. Применение быстрых разложений для изучения напряженного состояния прямоугольной пластины на упругом основании	250

DOI: 10.58168/OpEq2025_5-11

УДК 004.8

**ПРОБЛЕМАТИКА ШИРОКОГО ВНЕДРЕНИЯ ИСКУССТВЕННОГО
ИНТЕЛЛЕКТА**

PROBLEMS OF WIDE IMPLEMENTATION OF ARTIFICIAL INTELLIGENCE

Анарбекова Бурулча Сыргаковна

студентка, Кыргызский национальный аграрный университет

им. К.И. Скрябина, г. Бишкек, Кыргызская Республика

Жусупбаева Гульзат Амангельдиевна

кандидат физико-математических наук, доцент

Кыргызский национальный аграрный университет им. К.И. Скрябина,

г. Бишкек, Кыргызская Республика

Anarbekova Burulcha Syrgakovna

student, Kyrgyz National Agrarian University named after K.I. Scriabin, Bishkek,

Kyrgyz Republic

Zhusupbaeva Gulzat Amangeldievna

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,

Kyrgyz National Agrarian University named after. K.I. Scriabin, Bishkek, Kyrgyz

Republic

Аннотация. В статье рассматриваются ключевые проблемы, возникающие при внедрении искусственного интеллекта (ИИ) в различные сферы жизни. Основное внимание уделено этическим, юридическим, социальным и экономическим последствиям использования ИИ, а также его влиянию на рынок труда и безопасность данных. Автор анализирует последствия автоматизации, проблемы с прозрачностью алгоритмов, а также необходимость разработки международных стандартов и этических норм для безопасного внедрения технологий ИИ.

Abstract. The article discusses the key issues arising from the widespread implementation of artificial intelligence (AI) in various spheres of life. The focus is on the ethical, legal, social, and economic consequences of AI usage, as well as its impact on the labor market and data security. The author analyzes the consequences of automation, transparency issues in algorithms, and the need for the development of international standards and ethical norms for the safe integration of AI technologies.

Ключевые слова: искусственный интеллект, этика, рынок труда, автоматизация, безопасность данных, автономные автомобили.

Keywords: artificial Intelligence, ethics, labor market, automation, data security, autonomous vehicles.

В последние десятилетия искусственный интеллект (ИИ) стал одним из самых обсуждаемых и перспективных направлений технологического прогресса. От автоматизации простых задач до создания сложных систем, способных принимать решения, ИИ стремительно внедряется в различные сферы человеческой деятельности, включая медицину, транспорт, финансы, производство и даже искусство. В некоторых случаях ИИ может значительно повысить эффективность и качество работы, в других – вызвать проблемы, которые требуют тщательного анализа и предсказания последствий [2].

Одной из самых значимых проблем является этическое, социальное и экономическое воздействие широкого внедрения ИИ. Использование таких технологий ставит перед обществом новые вызовы, включая вопросы ответственности за решения, принимаемые алгоритмами, потенциальную угрозу утраты рабочих мест, изменение рыночных структур и усиление социального неравенства. Одновременно с этим, не менее важной остается угроза безопасности: ИИ может стать объектом кибератак, а его применение в военных целях может привести к непредсказуемым последствиям для глобальной безопасности. В этих условиях важным становится поиск разумного баланса между инновациями и рисками, что требует разработки эффективных правовых

норм и этических стандартов. В данном контексте следует учитывать не только возможности, которые открывает искусственный интеллект, но и те сложности, с которыми неизбежно столкнется общество при его интеграции в повседневную жизнь. Введение ИИ в различные области жизни требует внимательного подхода, сбалансированного регулирования и постоянного мониторинга его воздействия на общество, экономику и безопасность. Для успешного и безопасного внедрения ИИ необходимо обеспечение эффективного контроля и мониторинга.

1. Этические и моральные проблемы

Одной из важнейших этических проблем ИИ является принятие решений машинами в тех сферах, где они могут затронуть жизни людей. ИИ уже используется для принятия решений в таких областях, как: медицина и сфере финансовых услуг. Например: - ИИ может диагностировать заболевания, выбирать методы лечения и даже выполнять операции. Важно, чтобы такие решения были точными и обоснованными.

Проблема заключается в том, что многие алгоритмы ИИ могут быть "черными ящиками", то есть мы не всегда понимаем, как именно они принимают решения. Это вызывает вопросы о прозрачности: нужно ли нам понимать, как работает ИИ, чтобы доверять его решениям? И кто несет ответственность, если решение окажется ошибочным или несправедливым?

Тема внедрения искусственного интеллекта в повседневную жизнь, в том числе через игрушки и автомобили, открывает множество новых возможностей и одновременно порождает серьезные вопросы, требующие внимательного анализа и регулирования.

Современные технологии ИИ включают автономные системы, такие как беспилотные автомобили, дроны и роботы, которые могут действовать без вмешательства человека. Например, автономный автомобиль, столкнувшись с ситуацией, где необходимо принять решение (например, кому наносить ущерб при неизбежной аварии), должен сам решить, как поступить.

Автономные автомобили, оснащенные искусственным интеллектом, обещают революционизировать транспортную отрасль. Эти машины смогут точно рассчитывать маршрут, выбирать оптимальную скорость и даже предсказывать возможные аварийные ситуации. Однако внедрение беспилотных транспортных средств также сопровождается рядом вопросов, особенно в области защиты персональных данных.

Автономные автомобили, взаимодействуя с различными инфраструктурами и сервисами, будут собирать огромные объемы данных о местоположении пользователей, их маршрутах и предпочтениях. Эти данные могут быть использованы для коммерческих целей, например, для построения маршрутов с учетом точек интереса, которые платят за рекламные места. Важно, чтобы владельцы автомобилей имели контроль над своими данными и могли управлять их использованием.

Кроме того, массовое внедрение беспилотных автомобилей неизбежно приведет к сокращению рабочих мест в автомобильной отрасли, особенно среди водителей грузовиков и таксистов. Прогнозы указывают, что до 25 тыс. водителей грузовиков могут потерять работу каждую неделю в связи с автоматизацией перевозок. Это потребует пересмотра подходов к обучению и переквалификации работников, а также разработки мер поддержки для тех, кто окажется в группе риска. С другой стороны, автономные автомобили имеют огромный потенциал в плане безопасности и экологии. Благодаря более точному управлению, они могут значительно снизить количество дорожно-транспортных происшествий, в том числе смертельных. Кроме того, автономные автомобили могут быть более эффективными с точки зрения энергопотребления и использования ресурсов, что может способствовать снижению выбросов углекислого газа и других загрязнителей в атмосферу.

С развитием ИИ появляется угроза его использования для манипуляции мнением и поведением людей. Например, с помощью ИИ можно создавать фальшивые новости (fake news) или применять таргетированную рекламу,

которая может влиять на выборы, потребительские предпочтения или даже на общественное мнение.

2. Влияние на рынок труда

Одним из наиболее заметных последствий внедрения ИИ является автоматизация. Роботы и алгоритмы могут выполнять рутинные, монотонные задачи быстрее и точнее, чем люди. Это приводит к значительному сокращению рабочих мест в ряде отраслей. Примеры:

- **Производственные и складские работы:** ИИ и роботы уже заменяют людей в таких сферах, как производство, логистика и управление складами. Это связано с более высокой производительностью роботов, которые могут работать без перерывов и ошибок.
- **Транспорт:** Автономные транспортные средства (например, беспилотные автомобили и грузовики) могут уменьшить потребность в водителях, водителях такси и курьерах.
- **Финансовый сектор:** ИИ помогает автоматизировать многие процессы в банках, таких как анализ кредитоспособности, обслуживание клиентов через чат-боты и автоматическое принятие решений, что может снизить потребность в банковских работниках.

Внедрение ИИ в рабочие процессы, безусловно, приведет к снижению потребности в некоторых видах труда, что может вызвать рост безработицы в определенных секторах. Это особенно актуально для работников, чьи профессии связаны с рутинными и повторяющимися задачами [1]. Например:

- **Кассовые работники:** С развитием самообслуживания и автоматических касс в супермаркетах исчезает необходимость в людях на этих позициях.
- **Работники в области обслуживания:** например, в ресторанной индустрии роботизированные системы могут заменить официантов, а в гостиничном бизнесе — работников рецепции.

3. Юридические и правовые проблемы

Интеграция ИИ в различные сферы жизни требует пересмотра существующих правовых норм и создания новых законов, которые будут учитывать особенности использования ИИ.

4. Технические проблемы и риски

Внедрение ИИ сопряжено с множеством технических трудностей и рисков, которые могут ограничивать его развитие и использование.

Надежность и безопасность. ИИ-системы должны быть надежными и безопасными, чтобы избежать сбоев, ошибок и уязвимостей. Поскольку ИИ может принимать автономные решения, сбои в работе таких систем могут привести к катастрофическим последствиям, например, в транспорте или энергетике.

Отсутствие прозрачности. Современные ИИ-системы, в частности алгоритмы глубокого обучения, являются черными ящиками — их решения сложно объяснить и интерпретировать. Это вызывает опасения по поводу того, как принимаются решения и почему система поступает определенным образом.

Развитие ИИ без этических ограничений. Технологии ИИ развиваются гораздо быстрее, чем регулирующие их законы и моральные нормы. Без правильного контроля и этических стандартов ИИ может быть использован во вред, например, в виде манипуляций с массовыми информационными потоками или в сфере кибербезопасности [2].

5. Экономические и социальные проблемы

Проблемы с экономическим распределением. Внедрение ИИ может повлиять на экономическое распределение в глобальном масштабе. Страны и компании, имеющие доступ к передовым технологиям, могут получить конкурентное преимущество, что сделает их доминирующими в мировой экономике. Это усилит разрыв между развитыми и развивающимися странами.

Социальные последствия. Массовая автоматизация и внедрение ИИ могут вызвать значительные изменения в социальной структуре. Например, в странах

с высоким уровнем безработицы из-за автоматизации могут возникнуть протесты, социальное недовольство и даже массовые волнения [1].

В ходе обсуждения различных аспектов, связанных с проблемами искусственного интеллекта (ИИ), можно прийти к выводу, что развитие этой технологии несет с собой как большие возможности, так и ответственность. ИИ может значительно улучшить качество жизни, повысить эффективность работы в различных сферах и помочь решать комплексные задачи, но одновременно порождает серию проблем, которые требуют серьезного внимания.

ИИ должен служить на благо человека, не усиливая существующие проблемы, нужно его разработать так, чтобы он способствовал решению актуальных задач человечества.

Список литературы

1. Михайлов А. И. Искусственный интеллект: Современные проблемы и перспективы // А. И. Михайлов. — М.: Наука, 2020. — 350 с.

2. Жуков И. В. Проблемы применения ИИ в различных отраслях // И. В. Жуков, Н. П. Петров. — СПб.: Питер, 2019. — 280 с.

3. Дони́на И.А. Искусственный интеллект в современном образовании: возможности и угрозы // ISSN: 2075-3500 журнал: психолого-педагогический поиск Учредители: Рязанский государственный университет им. С.А. Есенина DOI: 10.37724/RSU.2021.57.1.002

References

1. Mikhailov A. I. Artificial Intelligence: Modern Problems and Prospects // A. I. Mikhailov. - M.: Nauka, 2020. - 350 p.

2. Zhukov I. V. Problems of applying AI in various industries // I. V. Zhukov, N. P. Petrov. - St. Petersburg: Piter, 2019. - 280 p.

3. Donina I.A. Artificial intelligence in modern education: opportunities and threats // ISSN: 2075-3500 journal: psychological and pedagogical search Founders: Ryazan State University named after S.A. Yesenin DOI: 10.37724/RSU.2021.57.1.002

DOI: 10.58168/OpEq2025_12-19

УДК 625.8:630

**ПРОГРАММА ДЛЯ АНАЛИЗА РАЗМЕРНО-КАЧЕСТВЕННЫХ
ХАРАКТЕРИСТИК ЛЕСОПРОДУКЦИИ, ЗАГОТОВЛЕННОЙ
С ПРИМЕНЕНИЕМ МНОГООПЕРАЦИОННЫХ ЛЕСНЫХ МАШИН**
PROGRAM FOR ANALYSIS OF DIMENSIONAL AND QUALITY
CHARACTERISTICS OF FOREST PRODUCTS HARVESTED USING MULTI-
OPERATION FOREST MACHINES

Баканач Егор Александрович

магистрант кафедры технологии лесозаготовительных производств
СПбГЛТУ, г. Санкт-Петербург, Россия

Угрюмов Сергей Алексеевич

доктор технических наук, профессор,
заведующий кафедрой технологии лесозаготовительных производств
СПбГЛТУ, г. Санкт-Петербург, Россия

Bakanach Egor Aleksandrovich

Master's student, Department of Technology of Logging Production
Saint Petersburg State Forest Engineering University, Saint Petersburg, Russia

Ugryumov Sergey Alekseevich

Doctor of Technical Sciences, Professor,
Head of the Department of Technology of Logging Production
SPbGLTU, Saint Petersburg, Russia

Аннотация. В статье рассмотрен вопрос использования программных продуктов для анализа и визуализации отчетных данных, полученных с бортовых компьютеров многооперационных лесных машин. Предложена программа, позволяющая оценить статистические характеристики основных размерных

параметров заготовленной древесины, визуализировать данные о диаметрах и процентном соотношении сортиментов по породам заготовленных сортиментов, визуализировать схемы раскрывки каждого заготовленного дерева.

Abstract. In the article considers the issue of using software products for the analysis and visualization of reporting data obtained from on-board computers of multi-functional forest machines. A program is proposed that allows one to evaluate the statistical characteristics of the main dimensional parameters of harvested timber, visualize data on diameters and percentage ratios of assortments by species of harvested assortments, and visualize cross-cutting schemes for each harvested tree.

Ключевые слова: программа, древесина, сортимент, заготовка, многооперационная лесная машина, статистические характеристики.

Keywords: program, timber, assortment, procurement, multi-operational forest machine, statistical characteristics.

В России основная часть древесины заготавливается в сортиментах по скандинавской технологии с применением многооперационных лесных машин, оснащенных программным обеспечением для контроля объема и размерно-качественных характеристик заготовленной древесины, а также иных технических параметров функционирования машин [1].

Вопрос своевременного контроля размерно-качественных характеристик заготовленной древесины, на основе которого можно оперативно корректировать работу лесозаготовительной техники, является актуальным, а его решение позволяет повысить эффективность лесозаготовки с уменьшением издержек производства [2].

Производители многооперационных лесных машин снабжают их программными продуктами собственной разработки. Отечественное программного обеспечение, которое позволяло бы оперативно анализировать размерные и качественные параметры заготовленной древесины, на рынке не представлено.

Для анализа и визуализации отчетных данных, полученных с бортовых систем валочно-сучкорезно-раскряжевочных машин, создана программа, которая может использоваться как приложение для сотрудников лесозаготовительных предприятий [3]. Программа позволяет производить систематизацию данных по отчетным файлам, полученных с бортовых систем валочно-сучкорезно-раскряжевочных машин и визуализировать их.

Программа написана на языке Python (версия – 3,9) с использованием следующих библиотек:

- Numpy для работы с многомерными массивами и матрицами;
- Matplotlib для визуализации данных двумерной графикой;
- PyQt5 для создания графических интерфейсов;
- Re для работы с регулярными выражениями;
- Pandas для обработки и анализа данных.

Исходные данные загружаются из отчетных файлов бортовых компьютеров многооперационных лесных машин (рис. 1).

СТВОЛ No	ПОРОДА	ДЛИНА/см	ВЕРХ./мм	ОБЪЕМ/дм3
941	1	ОСИНАБАЛАНС 618	230	268
		ДЛИНА/см 50 150 250 350 450 550		
		ДИАМ/мм 244 224 236 238 228 231		
	2	ОСИНАБАЛАНС 619	169	193
		ДЛИНА/см 50 150 250 350 450 550		
		ДИАМ/мм 220 210 203 200 194 183		
940	1	ОСИНАБАЛАНС 616	311	482
		ДЛИНА/см 50 150 250 350 450 550		
		ДИАМ/мм 350 322 314 302 300 303		
	2	ОСИНАБАЛАНС 616	267	402
		ДЛИНА/см 50 150 250 350 450 550		
		ДИАМ/мм 301 294 293 287 285 266		
	3	ОСИНАБАЛАНС 619	235	300
		ДЛИНА/см 50 150 250 350 450 550		
		ДИАМ/мм 262 265 242 256 230 237		
	4	ОСИНАБРАК 642	120	184
		ДЛИНА/см 50 150 250 350 450 550		
		ДИАМ/мм 219 209 210 185 170 185		
	5	ОСИНАБРАК 9	119	1
		ДЛИНА/см		
		ДИАМ/мм		
	6	ОСИНАБРАК 6	122	1
		ДЛИНА/см		
		ДИАМ/мм		
	7	ОСИНАБРАК 22	142	3
		ДЛИНА/см		
		ДИАМ/мм		
	8	ОСИНАБРАК 47	104	5
		ДЛИНА/см		

Рисунок 1 – Отчетные данные, экспортированные из бортового компьютера многооперационной лесной машины

Программа обрабатывает файлы отчетных данных и позволяет решить следующие задачи:

- визуализировать данные о диаметрах по каждому виду сортиментов в форме гистограммы;
- визуализировать процентное соотношение сортиментов по породам с использованием круговой диаграммы;
- визуализировать схемы раскрывки каждого заготовленного дерева;
- рассчитать статистические показатели диаметров, длин и объемов заготовленных сортиментов;
- визуализировать данные о среднем сбеге деревьев по породам.

Программа имеет несколько рабочих вкладок. При выборе вкладки «Диаметры» появляется выпадающий список сортиментов. После выбора сортимента происходит генерация столбчатой диаграммы, с помощью которой можно изучить долю диаметрических групп (группировка происходит по 20 мм) от общего объема соответствующего сортимента. На рис. 2 приведен пример распределения диаметров осинового баланса. Как можно заметить, распределение визуально близко к распределению Гаусса-Лапласа (нормальному распределению).

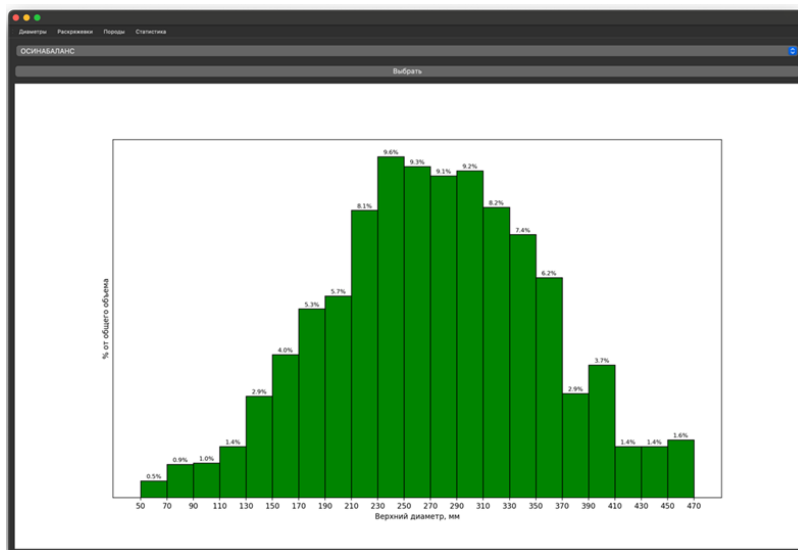


Рисунок 2 – Пример распределения диаметров заготовленных сортиментов

При выборе вкладки «Раскряжевки» появляется текстовое поле, в которое пользователю необходимо ввести номер заготовленного многооперационной машиной дерева. После нажатия кнопки «Выбрать» происходит визуализация схемы раскряжки соответствующего дерева, или хлыста (рис. 3). Красной пунктирной линией отмечены места распила, сверху указан зафиксированный диаметр в этом месте в миллиметрах. В центре каждого сортимента указана его длина в сантиметрах.

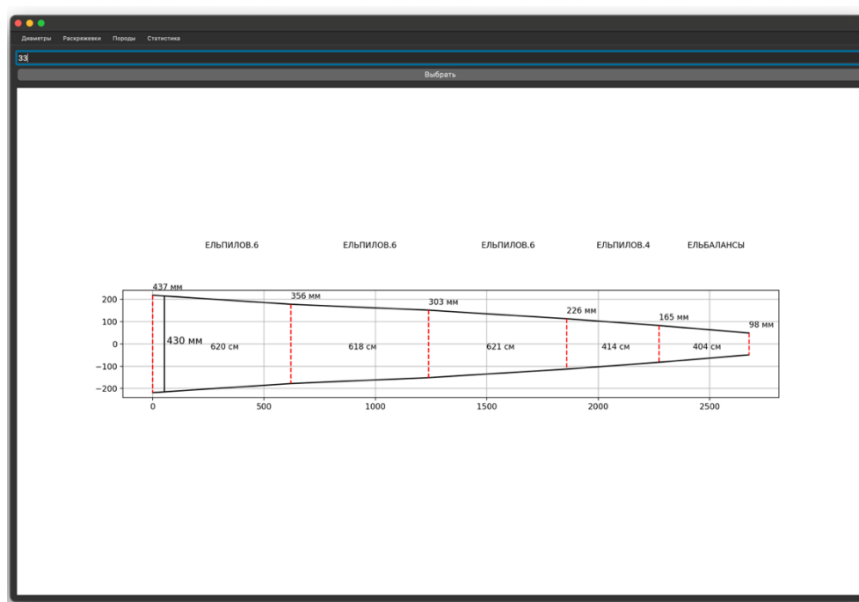


Рисунок 3 – Пример визуализации схемы раскряжки хлыста

Дополнительной функцией является определение диаметра в любой точке хлыста (на рис. 3 это 430 мм). Расчет диаметра в определенной точке рассчитывается с помощью функции в библиотеке NumPy, которая выполняет одномерную линейную интерполяцию для набора заданных данных точек. Она оценивает значение функции в промежуточных точках на основе известных дискретных значений. По причине отсутствия в отчетных данных информации о диаметре ствола в месте первого распила, это значение рассчитывается для каждого ствола с учетом его среднего сбега и длины первого сортимента (на рис. 3 это значение 437 мм).

При выборе вкладки «Породы» появляется выпадающий список пород. После выбора сортимента необходимо нажать кнопку «Выбрать» и генерируется круговая диаграмма, с помощью которой можно изучить долю заготовленных сортиментов конкретных пород (рис. 4).

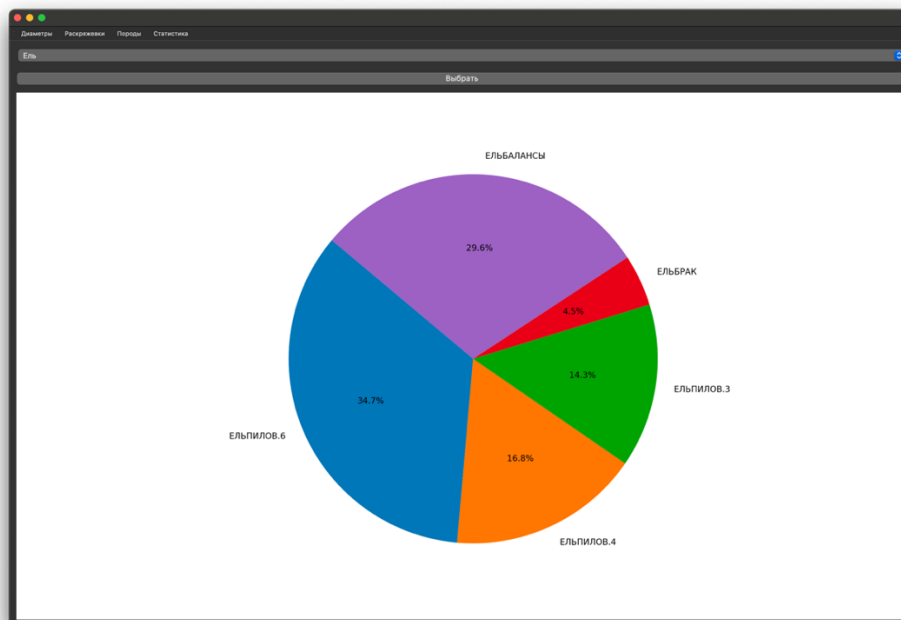


Рисунок 4 – Пример отображения соотношения заготовленной древесины по породам

Во вкладке «Статистика» отображаются рассчитанные статистические показатели по длинам, диаметрам и объемам заготовленных сортиментов – среднее значение, стандартное среднеквадратическое отклонение, дисперсия, коэффициент вариации, полное поле рассеивания, ошибка среднего арифметического, средняя квадратическая ошибка, показатель точности, оценка достоверности статистических характеристик, максимальное и минимальное значение, значение асимметрии и эксцесса. На рис. 5 приведен пример оценки статистических характеристик для трех показателей – по длинам, по объемам и по диаметрам заготовленных сортиментов.

Данные по длинам сортиментов:	Данные по объемам:	Данные по диаметрам:
Средняя длина : 413.2 см	Средний объем сортиментов: 120.2 дм ³	Средний диаметр сортиментов: 175.0 мм
Стандартное квадратическое отклонение : 0.9 см	Стандартное квадратическое отклонение : 28.5 дм ³	Стандартное квадратическое отклонение : 20.6 мм
Дисперсия: 0.9 см	Дисперсия: 809.6 дм ³	Дисперсия: 425.7 мм
Коэффициент вариации: 0.22 %	Коэффициент вариации: 23.68 %	Коэффициент вариации: 11.79 %
Поле рассеивания: 410.46 - 416.03 см	Поле рассеивания: 34.82 - 205.55 дм ³	Поле рассеивания: 113.14 - 236.94 мм
Ошибка среднего арифметического: 0.03	Ошибка среднего арифметического: 1.02	Ошибка среднего арифметического: 0.74
Средняя квадратическая ошибка: 0.02	Средняя квадратическая ошибка: 0.72	Средняя квадратическая ошибка: 0.52
Показатель точности: 0.008 %	Показатель точности: 0.848 %	Показатель точности: 0.422 %
Проверка достоверности статистических характеристик: 12426 >> 3	Проверка достоверности статистических характеристик: 118 >> 3	Проверка достоверности статистических характеристик: 237 >> 3
Максимальное значение: 416 см	Максимальное значение: 214 дм ³	Максимальное значение: 241 мм
Минимальное значение: 412 см	Минимальное значение: 80 дм ³	Минимальное значение: 148 мм
Значение асимметрии: 0.44	Значение асимметрии: 0.99	Значение асимметрии: 0.84
Значение эксцесса: 0.01	Значение эксцесса: 0.86	Значение эксцесса: 0.25

Рисунок 5 – Пример расчета статистических характеристик

К примеру, изучив данные рис. 5, можно заметить, что длина заготовленного елового пиловочника варьируется от 412 до 416 см, а средняя длина составляет 413 см. Можно сделать вывод, что припуск составляет 3...4% от номинальной длины (4 м), что значительно превышает значения по ГОСТ 9463-88.

Также можно заметить, что коэффициент вариации по всем характеристикам меньше 30%, поэтому статистическая совокупность считается однородной. Это означает, что большинство вариантов находится недалеко от средней, и найденное значение достоверно характеризует центральную тенденцию совокупности.

Таким образом, представленная программа позволяет упростить процесс анализа отчетных данных с бортовых систем многооперационных лесных машин и визуализировать полученные данные в удобном виде.

Список литературы

1. Мануковский А.Ю. Программные комплексы современных лесных машин / А.Ю. Мануковский, М.В. Зорин, С.Е. Рудов, О.А. Куницкая, И.В. Григорьев // Приоритетные направления инновационной деятельности в промышленности: сборник научных статей. – Казань: ООО «КОНВЕРТ», 2020. – С. 57-59.

2. Герасимов Ю.Ю. Производительность харвестеров на сплошных рубках / Ю.Ю. Герасимов, В.А. Сенькин, К. Вяятайнен // Resources and Technology, 2012. – №2. – Т. 9. –С. 82–93.

3. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2025617886 RU. Программа для анализа и визуализации отчётных данных валочно-сучкорезно-раскряжевых машин / Е.А. Баканач, С.А. Угрюмов; заявитель и патентообладатель Санкт-Петербургский государственный лесотехнический университет имени С.М. Кирова; заявл. 27.03.2025, опубл. 31.03.2025, Бюл. № 4. – 1 с.

References

1. Manukovsky A.Yu. Software packages for modern forestry machines / A.Yu. Manukovsky, M.V. Zorin, S.E. Rudov, O.A. Kunitskaya, I.V. Grigoriev // Priority areas of innovation activity in industry: a collection of scientific articles. – Kazan: ООО «CONVERT», 2020. – PP. 57-59.

2. Gerasimov Yu.Yu. Productivity of harvesters in clearcuts / Yu.Yu. Gerasimov, V.A. Senkin, K. Väätäinen // Resources and Technology, 2012. – No. 2. – V. 9. – PP. 82-93.

3. Certificate of state registration of computer program No. 2025617886 RU. Software for analysis and visualization of reporting data of felling-knocking-bucking machines / E.A. Bakanach, S.A. Ugryumov; applicant and patent holder Saint-Petersburg State Forest Engineering University named after S.M. Kirov; declared 27.03.2025, published 31.03.2025, Bull. № 4. – 1 p.

DOI: 10.58168/OpEq2025_20-26

УДК 517.923

ЗАДАЧА О ДЕФОРМАЦИИ ОБЪЕКТОВ СЕТЕВОЙ СТРУКТУРЫ
THE PROBLEM OF DEFORMATION OF NETWORK STRUCTURE OBJECTS

Белоглазова Татьяна Владимировна

кандидат физико-математических наук, доцент,

ВУНЦ ВВС «ВВА имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина»,

Воронеж, Россия

Евсюкова Валентина Петровна

доцент кафедры математики и физики, кандидат технических наук,

Воронежский государственный аграрный университет

имени императора Петра I, Воронеж, Россия

Шишкин Михаил Сергеевич

ВУНЦ ВВС «ВВА имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина»,

Воронеж, Россия

Beloglazova Tatiana Vladimirovna

Associate Professor, Candidate of Physical and Mathematical Sciences,

VUNTS of the Air Force

"VVA named after Prof. N.E. Zhukovsky and Yu.A. Gagarin", Voronezh, Russia

Evsyukova Valentina Petrovna

Associate Professor, Candidate of Technical Sciences,

Department of Mathematics and Physics,

Voronezh State Agrarian University named after Emperor Peter the Great,

Voronezh, Russia

Shishkin Mihail Sergeevich

VUNTS of the Air Force

"VVA named after Prof. N.E. Zhukovsky and Yu.A. Gagarin", Voronezh, Russia

Аннотация. В статье представлена математическая модель для расчета деформации объектов сетевой структуры в результате точечного воздействия на них внешней силы.

Abstract. The article presents a mathematical model for calculating the deformation of the network structure of facilities as a result of the point impact of external forces on it.

Ключевые слова: геометрический граф, дифференциальные уравнения, математическое моделирование, сетевая техническая система, функция Грина.

Keywords: geometric graph, Green's function, network technical system, differential equations, mathematical modeling.

В последние годы наблюдается значительный рост использования беспилотных летательных аппаратов. Полеты БПЛА фиксируются не только на линии боевого соприкосновения, но и в Белгородской, Брянской, Курской, Воронежской, Московской областях. На данный момент существует много способов борьбы с дронами, но одни из самых простых средств — это средства физической защиты. Защитные сетки способны эффективно противостоять угрозам, исходящим от беспилотников. Это простое решение способное защитить людей и технику в последнее время становится необходимостью.

При установке защитной сетки следует учесть, что ее деформация при прогибе в результате попадания в нее постороннего предмета (дрона), должна быть больше расстояния до поверхности охраняемых объектов. Для расчета возможного прогиба сетки в качестве математической модели можно рассматривать систему струн с закрепленными концами.

В статье рассматривается математическое моделирование задачи о деформации защитной сети от дронов системами дифференциальных уравнений на геометрических графах, проводится исследование построенной однородной краевой задачи, устанавливаются критерии невырожденности неоднородных задач с постоянными и переменными коэффициентами, строятся функции Грина

для представления решений задач в интегральной форме, производится оценка величины деформации сети в результате попадания в нее дрона с учетом силы удара и места попадания.

Рассмотрим сеть Γ , состоящую из произвольного числа ребер $R = \bigcup_{i=1}^n \gamma_i$.

Обозначим новую форму сети в результате ее деформации через функцию $u(x) \in \Gamma$. Множество внутренних вершин графа обозначим через $J(\Gamma)$, а множество граничных вершин $\partial\Gamma$. Множество ребер, примыкающих к общей внутренней вершине обозначим через $R(a), a \in J(\Gamma)$, тогда всю систему из произвольного числа струн обозначим $\Gamma = R \cup J(\Gamma)$ и назовем геометрическим графом в \mathbb{R}^3 [1].

Если на $\forall [a_1, a_2] \in \Gamma$ ввести натуральную параметризацию $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t) = a_1 + t(a_2 - a_1) / |a_2 - a_1|, t \in (0, |a_2 - a_1|)$, то $[a_1, a_2]$ оказывается обычным отрезком из \mathbb{R} . Тогда форма струны $u(\varphi(t))$ в результате деформации станет обычной функцией на отрезке. Естественно предполагать, что для нее будут существовать производные первого $\frac{d}{dt}u(\varphi(t))$ и высших порядков $u^{(k)}(x) = \frac{d^k}{dt^k}u(\varphi(t))$. А на концах интервала $\gamma = (a_1, a_2)$ будут определены односторонние производные по направлению $u^{(k)}(a_i + 0)$.

Из физического смысла задачи следует, что плотность внешней силы, вызывающей деформацию $f(\cdot): \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$, а эластичности струн непрерывны и $q(x) > 0, \forall x \in \Gamma$. Будем предполагать, что смещение всех точек системы от положения равновесия происходит в направлении вектора действия внешней силы.

В основе построения краевой задачи лежит вариационный принцип минимизации энергии [1,2].

Пусть потенциальная энергия системы определяется функционалом

$$P(u) = \int_{\Gamma} \left(fu - q \frac{u'^2}{2} \right) dx = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} \left(f_i u_i - q_i \frac{u_i'^2}{2} \right) dx, \quad \text{тогда для } u(x) \in C^2(\Gamma),$$

удовлетворяющих условиям жесткого закрепления на границе

$$u(a) = 0, \quad \forall a \in \partial\Gamma, \quad (1)$$

условиям непрерывности

$$\sum_{\gamma \in R(a), a \in J(\Gamma)} u_{\gamma}(a+0) = 0, \quad (2)$$

стационарное значение $u(\cdot)$ функционала $P(u)$ удовлетворяет условиям

$$\sum_{\gamma \in R(a), a \in J(\Gamma)} q_{\gamma} u'_{\gamma}(a+0) = 0 \quad (3)$$

и уравнениям

$$-\left(q_i u_i' \right)' = f_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (4)$$

Для неоднородной задачи (1) – (4) доказано, что соответствующая ей однородная задача имеет только тривиальное решение.

Для частных случаев были получены критерии невырожденности.

Например,

если $\Gamma = (a_1, a_2)$, $q(x) \equiv 1$, то задача

$$u(a_1) = 0, u(a_2) = 0, \quad (5)$$

$$-u'' = f \quad (6)$$

невырождена при $\Delta = (a_1 - a_2) \neq 0$.

Если $\Gamma = (a_1, a_2)$, $q(x) = kx + b$, $\left(x > -\frac{b}{k}, k \neq 0 \right)$, то задача

$$u(a_1) = 0, u(a_2) = 0, \quad (7)$$

$$-\left((kx + b)u' \right)' = f \quad (8)$$

однозначно разрешима при условии $\Delta = \frac{1}{k} \ln \left| \frac{ka_1 + b}{ka_2 + b} \right| \neq 0$.

Если $\Gamma = (a_1, a_2)$, $q(x) = \frac{1}{kx+b}$, $\left(x > -\frac{b}{k}, k \neq 0\right)$, то задача

$$u(a_1) = 0, u(a_2) = 0, \quad (9)$$

$$-\left(\frac{u'}{kx+b}\right)' = f \quad (10)$$

невырождена при $\Delta = (a_1 - a_2) \left(\frac{k}{2}(a_1 + a_2) + b\right) \neq 0$.

Для невырожденной задачи (1) – (4) при любой $f(x) \in C(\Gamma)$ и $u(x) \in C^2(\Gamma)$ решение может быть представлено в виде:

$$u(x) = \int_{\Gamma} G(x,s) f(s) ds, \quad (11)$$

где $G(x,s)$ - функция влияния, а $f(s)$ - плотность силы удара дрона в точку $s \in \Gamma$.

Функция Грина $G(x,s)$ для краевой задачи второго порядка на отрезке можно построить по формуле:

$$G(x,s) = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} H(x,s) & \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ l_1(H(\cdot,s)) & l_1(\varphi_1) & l_1(\varphi_2) \\ l_2(H(\cdot,s)) & l_2(\varphi_1) & l_2(\varphi_2) \end{vmatrix}, \quad (12)$$

где $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^2$ - фундаментальная система решений однородного уравнения,

$$H(x,s) = \begin{cases} 0, & a_1 < x < s; \\ K(x,s), & s < x < a_2, \end{cases} \quad K(x,s) = \frac{\begin{vmatrix} \varphi_1(s) & \varphi_2(s) \\ \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varphi_1(s) & \varphi_2(s) \\ \dot{\varphi}_1(s) & \dot{\varphi}_2(s) \end{vmatrix}} \quad (13)$$

Например, для задачи (5) – (6) функция Грина $G(x, s)$ имеет вид:

$$G(x, s) = \begin{cases} \frac{(a_2 - s)(x - a_1)}{a_1 - a_2}, & a_1 < x < s; \\ \frac{(a_2 - x)(s - a_1)}{a_1 - a_2}, & x < s < a_2. \end{cases} \quad (14)$$

Из свойств определенного интеграла имеет место оценка:

$$|u(x)| = \left| \int_{\Gamma} G(x, s) f(s) ds \right| \leq \int_{\Gamma} |G(x, s) f(s)| ds, \quad (15)$$

Тогда для оценки решения задачи (5) – (6) справедливо неравенство [3]:

$$|u(x)| \leq \int_{a_1}^{a_2} |G(x, s) f(s)| ds \leq \max_{a_1 \leq x \leq a_2} |G(x, s)| \int_{a_1}^{a_2} |f(s)| ds = \max_{a_1 \leq x = s \leq a_2} |G(x, s)| \int_{a_1}^{a_2} |f(s)| ds, \quad (16)$$

Следовательно, расстояние до охраняемого объекта h должно быть больше чем

$$\max_{a_1 \leq x = s \leq a_2} \left| \frac{(a_2 - s)(s - a_1)}{a_1 - a_2} \right| \int_{a_1}^{a_2} f(s) ds. \quad (17)$$

Так, если плотность внешней силы удара $f(x) \equiv 1, a_1 = 1, a_2 = 10$ то h должно быть больше чем $\frac{a_1 + a_2}{2|a_1 - a_2|} \int_{a_1}^{a_2} f(s) ds = \frac{11}{18} \int_1^{10} ds = \frac{11}{2} \approx 5,5$, а если $f(x) = x$,

$a_1 = 1, a_2 = 10$, то h должно быть больше чем

$$\frac{a_1 + a_2}{2|a_1 - a_2|} \int_{a_1}^{a_2} f(s) ds = \frac{11}{18} \int_1^{10} s ds = \frac{11}{18} \frac{s^2}{2} \Big|_1^{10} = \frac{11}{18} \cdot \frac{99}{2} = \frac{121}{4} \approx 30,25.$$

Оценка (17) позволяет быстро рассчитать расстояние, на котором должна быть установлена защитная сетка в зависимости от силы удара БПЛА.

Правильный расчет характеристик защитной сетки является важным этапом в процессе ее разработки и установки. Это позволит не только повысить уровень защиты военной техники, но и важных объектов гражданской инфраструктуры от атак беспилотных летательных аппаратов.

Список литературы

1. Белоглазова Т. В. О положительной обратимости разнорядковых задач на графах: дисс. канд. физ.- мат. наук. / Т. В. Белоглазова. – Воронеж., 2003. – 128 с.

2. Евсюкова В.П. Математическое моделирование сетевой технической системы с использованием вариационных принципов // Актуальные вопросы физико-математических и технических наук в сфере современных исследований АПК: Материалы национальной научно-практической конференции (23 октября 2024г.) - Воронеж: ФГБОУ ВО Воронежский ГАУ, 2024. – С. 177-181.

3. Покорный Ю.В. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю.В. Покорный, О.М. Пенкин, В.Л. Прядиев, А.В. Боровских, К.П. Лазарев, С.А. Шабров - Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2004. - 272 с.

References

1. Beloglazova T. V. On positive invertibility of different-order problems on graphs: diss. Cand. of Phys. and Mathematics. Sciences / T. V. Beloglazova. – Voronezh., 2003. – 128 p.

2. Evsyukova V.P. Mathematical modeling of a network technical system using variational principles // Actual issues of physical, mathematical and technical sciences in the field of modern research in the agro-industrial complex: Proceedings of the national scientific and practical conference (October 23, 2024) - Voronezh: Voronezh SAU, 2024. - P. 177-181.

3. Pokorny Yu.V. Differential equations on geometric graphs / Yu.V. Pokorny, O.M. Penkin, V.L. Pryadiev, A.V. Borovskikh, K.P. Lazarev, S.A. Shabrov - Moscow: FIZMATLIT, 2004. - 272 p.

DOI: 10.58168/OpEq2025_27-32

УДК 519.852

ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА С ОГРАНИЧЕНИЯМИ

A LIMITED TRANSPORT TASK

Веневитина Светлана Семеновна

кандидат физико-математических наук, доцент,
доцент кафедры математики ВГЛТУ, г. Воронеж, Россия

Сапронов Иван Васильевич

кандидат физико-математических наук, доцент,
доцент кафедры математики ВГЛТУ, г. Воронеж, Россия

Спирина Надежда Михайловна

старший преподаватель кафедры математики ВГЛТУ, г. Воронеж, Россия

Venevitina Svetlana Semyonovna

Ph.D. of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate
Professor at the Department of Mathematics, VSUFT, Voronezh, Russia

Sapronov Ivan Vasilievich

Ph.D. of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate
Professor at the Department of Mathematics, VSUFT, Voronezh, Russia

Spirina Nadezhda Mikhailovna

Senior Lecturer at the Department of Mathematics, VSUFT, Voronezh, Russia

Аннотация. Решается задача оптимизации доставки автомобилей к пунктам назначения с дополнительными ограничениями.

Abstract. The problem of optimizing the delivery of vehicles to their destinations with additional restrictions is being solved.

Ключевые слова. Транспортная задача, метод потенциалов, оптимальный план.

Keywords. The transport task, the method of potentials, the optimal plan.

В резерве трех автотранспортных предприятий a_1 , a_2 и a_3 имеется 20, 30 и 50 самосвалов соответственно. Есть два пункта погрузки древесины b_1 и b_2 , которым требуется 35 и 45 автомобилей. Стоимость перегона (доставки) одного самосвала от каждого автотранспортного предприятия в пункты погрузки задана платежной матрицей

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 20 & 30 \\ 10 & 40 \end{pmatrix}.$$

Требуется составить оптимальный по стоимости план доставки автомобилей при дополнительных ограничениях:

1) количество самосвалов от 2-го предприятия во 2-й пункт погрузки должно быть не менее 10,

2) количество самосвалов от 3-го предприятия в 1-й пункт погрузки должно быть не более 30.

Для лучшего восприятия запишем условия нашей задачи в виде таблицы

Таблица 1

$a_i \backslash b_j$	35	45
20	10	20
30	20	30
50	10	40

Дополнительные условия: 1) $x_{22} \geq 10$, 2) $x_{31} \leq 30$

Для выполнения первого ограничения $x_{22} \geq 10$, уменьшим «запасы», т.е. количество автомобилей, имеющихся у 2-го автопредприятия, и «запросы» в автомобилях, необходимых 2-му пункту погрузки на 10 единиц. После того, как

мы решим задачу, надо будет сделать обратный шаг и увеличить объем доставки x_{22} на 10 автомобилей.

Для выполнения второго ограничения $x_{31} \leq 30$, вместо первого пункта погрузки (с запросом в 35 машин) введем двух других: один из них с номером 1 будет иметь запрос в 30 машин, а другой с номером 3 – запрос в $5 = 35 - 30$ машин. Стоимости доставки машин в первом столбце останутся прежними. Стоимости доставки машин к 3-му (новому) пункту погрузки древесины будут те же, что и у 1-го пункта, кроме c_{33} , которая принимается равной M (сколь угодно большим числом). Так как $c_{33} = M$ – это самая большая стоимость доставки, то машины перевозить туда будет невыгодно, и в оптимальном решении соответствующая клетка окажется пустой. После того как мы найдем оптимальное решение, 3-й столбец (объемы доставок) надо будет добавить к 1-му.

Таким образом, с учетом ограничений получим новую таблицу 2:

Таблица 2

$a_i \backslash b_j$	30	35	5
20	10	20	10
20	20	30	20
50	10	40	M

Прежде чем решать полученную транспортную задачу обычным методом потенциалов, проверим выполнение условия баланса $\sum_i a_i = \sum_j b_j$.

$$\sum_i a_i = 20 + 20 + 50 = 90, \quad \sum_j b_j = 30 + 35 + 5 = 70.$$

Получили задачу с неправильным балансом. Для исправления баланса вводим 4-й фиктивный пункт погрузки с запросом в $90 - 70 = 20$ машин и с

нулевыми стоимостями доставки. Составим начальный опорный план методом наименьшего элемента.

Таблица 3

$a_i \backslash b_j$	30	35	5	20	
	10	20	10	0	
20	20	–	–	–	$u_1 = 0$
	20	30	20	0	
20	–	15	5	–	$u_2 = -10$
	10	40	M	0	
50	10	20	–	20	$u_3 = 0$
	$v_1 = 10$	$v_2 = 40$	$v_3 = 30$	$v_4 = 0$	

Вычислим стоимость доставки автомобилей при этом опорном плане:

$$F(X_1) = 20 \cdot 10 + 15 \cdot 30 + 5 \cdot 20 + 10 \cdot 10 + 20 \cdot 40 + 20 \cdot 0 = 1650 \text{ (ден. ед.)}$$

Проверим план на оптимальность методом потенциалов. Для «заполненных клеток» составляем уравнения $u_i + v_j = c_{ij}$:

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 10 \\ u_2 + v_2 = 30 \\ u_2 + v_3 = 20 \\ u_3 + v_1 = 10 \\ u_3 + v_2 = 40 \\ u_3 + v_4 = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} u_1 = 0, \\ u_2 = -10, \\ u_3 = 0, \\ v_1 = 10, \\ v_2 = 40, \\ v_3 = 30, \\ v_4 = 0. \end{array} \quad \begin{array}{l} (u_1 \text{ выбрали сами, остальные переменные} \\ \text{находим «по цепочке»)} \end{array}$$

Для «пустых» клеток проверяем неравенства $u_i + v_j \leq c_{ij}$:

$$u_1 + v_2 \leq 20 \quad 0 + 40 \leq 20 \quad \text{не верно}$$

$$u_1 + v_3 \leq 10 \quad 0 + 30 \leq 10 \quad \text{не верно}$$

$$u_1 + v_4 \leq 0 \quad 0 + 0 \leq 0$$

$$u_2 + v_1 \leq 20 \quad -10 + 10 \leq 20$$

$$u_2 + v_4 \leq 0 \quad -10 + 0 \leq 0$$

$$u_3 + v_3 \leq M \quad 0 + 30 \leq M$$

Полученное решение не является оптимальным, так как неравенства не выполнены в двух клетках (1;2) и (1;3).

Чтобы перейти к лучшему решению составим замкнутый цикл, который начинается в клетке (1;2) и меняет направление в клетках (1;1), (3;1), (3;2). В углах цикла расставляем знаки чередуя и начиная с + в клетке (1;2). Из клеток со знаком « \leftarrow » выбираем наименьшую перевозку $\theta = \min_{\leftarrow} \{20; 20\} = 20$. Сдвигаем это число по циклу в соответствии со знаком. Получаем второе опорное решение X_2

Таблица 4

$a_i \backslash b_j$	30	35	5	20	
20	10 —	20 20	10 —	0 —	$u_1 = 0$
20	20 —	30 15	20 5	0 —	$u_2 = 10$
50	10 30	40 0	M —	0 20	$u_3 = 20$
	$v_1 = -10$	$v_2 = 20$	$v_3 = 10$	$v_4 = -20$	

Так как при пересчете таблицы у нас обнулились перевозки в двух клетках вместо одной, то одну из них (например, клетку (3;2)) будем считать заполненной с перевозкой $x_{32} = 0$.

Снова проверяем план на оптимальность методом потенциалов. Для «заполненных клеток» составляем уравнения $u_i + v_j = c_{ij}$ и найденные u_i и v_j записываем в Таблицу 4. Для «пустых» клеток проверяем неравенства $u_i + v_j \leq c_{ij}$

и видим, что они все выполнены. Следовательно, полученное решение является оптимальным.

Запишем оптимальное решение исходной задачи. Для этого увеличим объем доставки x_{22} от второго автотранспортного предприятия ко второму пункту погрузки древесины на 10 автомобилей и объединим объемы доставок 3-го и 1-го пунктов погрузки.

$$\text{Получим: } X_{opt} = X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 20 \\ 5 & 25 \\ 30 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычислим стоимость доставки самосвалов от автопредприятий к пунктам погрузки древесины:

$$F_{opt} = F(X_2) = 20 \cdot 20 + 5 \cdot 20 + 25 \cdot 30 + 30 \cdot 10 = 1550.$$

Список литературы

1. Общий курс высшей математики для экономистов: учебник / под ред. В.И. Ермакова. – Москва : ИНФРА-М, 2003. – 656 с. – (Серия «Высшее образование»).
2. Сапронов, И. В. Прикладная математика : лабораторный практикум. В 2 ч. Ч. 2 / И. В. Сапронов, С. С. Веневитина, Е. О. Уточкина ; М-во образования и науки РФ, ФГБОУ ВО «ВГЛУ». – Воронеж, 2015. – 80 с.

References

1. General course of higher mathematics for economists: textbook / edited by V.I. Ermakov. – M.: INFRA-M, 2003. — 656 p. — (Series "Higher Education").
2. Sapronov, I.V. Applied Mathematics : laboratory workshop. At 2 parts. Part 2 / I. V. Sapronov, S. S. Venevitina, E. O. Utochkina ; Ministry of Education and Science of the Russian Federation, VSUFT. – Voronezh, 2015. – 80 p.

DOI: 10.58168/OpEq2025_33-38

УДК 004.8[1+9]

О НЕКОТОРЫХ ПРИКЛАДНЫХ МОДЕЛЯХ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА

ON SOME APPLIED MODELS OF ARTIFICIAL INTELLIGENCE

Гордиенко Татьяна Петровна

доктор педагогических наук, профессор, проректор по научной и
инновационной деятельности ГБОУВО РК КИПУ имени Февзи Якубова,
г. Симферополь, Россия

Билялова Лилия Ремзиевна

кандидат географических наук, доцент, доцент кафедры математики и физики
ГБОУВО РК КИПУ имени Февзи Якубова, г. Симферополь, Россия

Gordienko Tatyana Petrovna

D.Sc. of Pedagogical Sciences, Professor, Vice-Rector for Research and Innovation,
State Budget Educational Institution of Higher Education of the Republic of Crimea
Crimean Engineering and Pedagogical University the name of Fevzi Yakubov,
Simferopol, Russia

Bilyalova Liliya Remzievna

D.Sc. of Geographical Sciences, Associate Professor, Associate Professor at the
Department of Mathematics and Physics, State Budget Educational Institution of
Higher Education of the Republic of Crimea Crimean Engineering and Pedagogical
University the name of Fevzi Yakubov, Simferopol, Russia

Аннотация. В работе обсуждаются некоторые аспекты прикладных моделей искусственного интеллекта. Описано использование пропозициональной логики и нейронных сетей, а также применение математического аппарата искусственного интеллекта в психолого-педагогической диагностике и фильтрации входных данных.

Abstract. The paper deals with some aspects of applied models of artificial intelligence. The use of propositional logic and neural networks is described, as well as the application of the mathematical apparatus of artificial intelligence in psychological and pedagogical diagnostics and filtering of input data.

Ключевые слова: искусственный интеллект, модель, пропозициональная логика, дерево решений, нейрон, нейронная сеть, функция активации, валидность данных, сплошнолесосечная рубка, психолого-педагогическая диагностика.

Keywords: artificial intelligence, model, propositional logic, decision tree, neuron, neural network, activation function, data validity, clear cutting of a logging site of forest, psychological and pedagogical diagnostics.

К числу наиболее востребованных в автоматизации производственных процессов в промышленности, авиационной и космической отраслях, робототехнике и автомобилестроении, лесопромышленном комплексе, медицине, научных и социальных исследованиях относятся такие широко распространенные инструменты математического аппарата искусственного интеллекта (ИИ), как пропозициональная логика и нейронные сети, обладающие богатым спектром возможностей прикладного моделирования.

Этим обуславливается тот факт, что данная проблематика является в настоящее время объектом научного интереса многих исследователей.

В данной статье мы рассматриваем некоторые прикладные модели ИИ, в том числе нейронные сети, моделирующие психологические тесты и социально-педагогические опросы.

Одним из возможных приложений математического аппарата ИИ является моделирование анализа индивидуально-психологических свойств личности. В психологической практике часто используются когнитивные карты для исследования индифферентности личности на основе трех ее видов: интернальной, экстернальной и аккомодативной [2, 3]. Приведем показатели

значимости активационной функции интернальной индифферентности (см. Табл.1).

Таблица 1.

Весовые коэффициенты активационной функции нейрона, моделирующего интернальную индифферентность

Варианты ответов		Бихевиористические характеристики интернальной индифферентности		
		x_1	x_2	x_3
Логическая переменная	Значение	«Меня не особенно беспокоит то, что происходит сейчас в моей жизни»	«У меня пока нет определенных целей и планов на будущее»	«Я не вкладываю больших усилий в свои повседневные дела и обязанности»
y_1	Совершенно не согласен	1	1	1
y_2	Не согласен	2	2	2
y_3	Скорее не согласен	3	3	3
$y_4 (= \neg y_3)$	Скорее согласен	4	4	4
$y_5 (= \neg y_2)$	Согласен	5	5	5
$y_6 (= \neg y_1)$	Совершенно согласен	6	6	6

Тогда база знаний пропозициональной логики, моделирующей интернальную индифферентность, будет включать следующие правила:

$$(y_1[x_1] = 1) \wedge (y_1[x_2] = 1) \wedge (y_1[x_3] = 1) \Rightarrow S1$$

$$(y_1[x_1] = 1) \wedge (y_1[x_2] = 1) \wedge (y_2[x_3] = 2) \Rightarrow S1$$

$$(y_1[x_1] = 1) \wedge (y_1[x_2] = 2) \wedge (y_1[x_3] = 1) \Rightarrow S1$$

$$(y_2[x_1] = 2) \wedge (y_1[x_2] = 1) \wedge (y_1[x_3] = 1) \Rightarrow S1$$

где S1 = «низкий уровень интернальной индифферентности» [1].

Другим прикладным вариантом применения инструментов ИИ является фильтрация данных, с помощью которого выявляются противоречия в обрабатываемых входных данных и отсекаются так называемые «невалидные» данные, содержащие нестыковки. Выполнение этого этапа обработки данных может успешно осуществляться с помощью таких методов ИИ как дерево решений и прямой логический вывод.

Продемонстрируем вышесказанное примером взаимоисключающей информации в «невалидных» входных данных: «Температура воздуха 40^0 »; «Недостаточный уровень жидкости в радиаторе»; «Завести двигатель автомобиля». Наблюдаемые противоречия являются основанием для квалификации таких входных данных как «невалидных». В работе [4] показано, что применение описанной методики валидации позволило авторам выявить 21% «невалидных» входных данных.

Схема нейронной сети, моделирующей процесс валидации данных и обобщающей дерево решений из [4], изображена на Рис. 1.

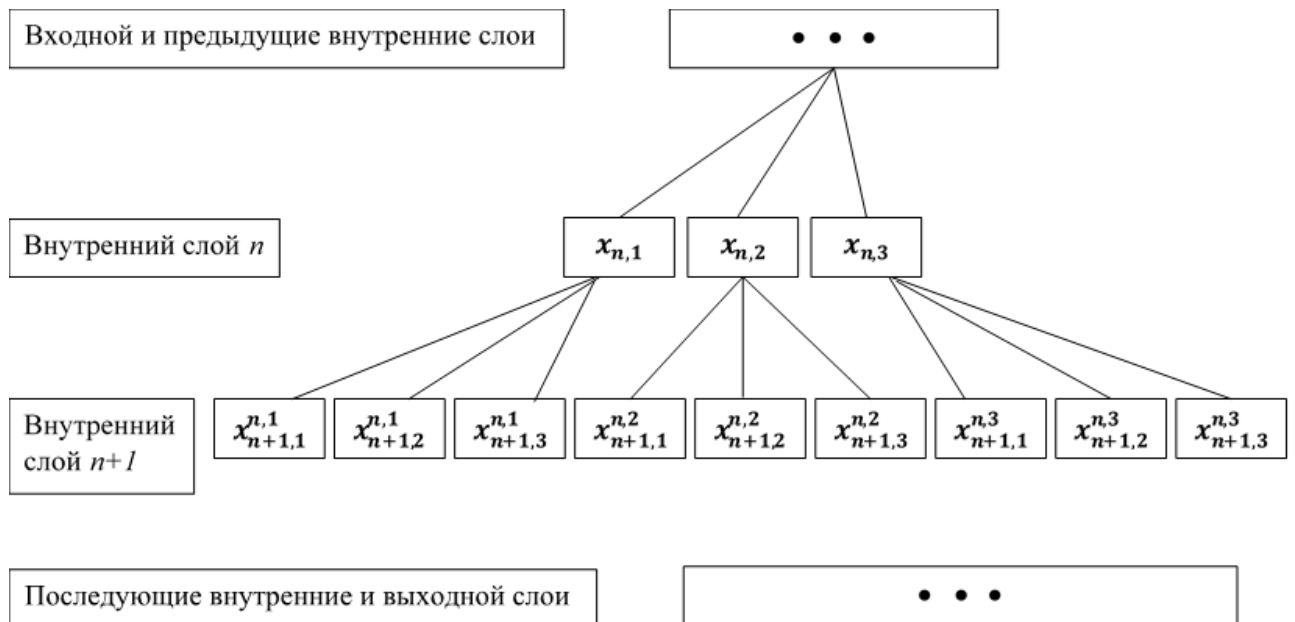


Рис. 1. Модель нейронной сети ($x_{n,i}$ – i -й нейрон n -го слоя)

Возможность применения математических инструментов ИИ в интеллектуальных системах принятия решений о допустимости сплошнолесосечных [5] рубок в лесотехнической отрасли показана на Рис.2.



Рис. 2. Фрагмент дерева решений, моделирующего процесс принятия решений о допустимости сплошнолесосечных рубок

Резюмируя вышесказанное, подчеркнем актуальность, широкие сферы применения и богатые возможности математического аппарата искусственного интеллекта и отметим, что необходимыми условиями достижения эффективности в использовании указанных инструментов для получения достоверных выходных данных являются валидность входных данных, эффективные функции активации и интегрированность математического аппарата искусственного интеллекта.

Список литературы

1. Билялова, Л. Р. Дидактические особенности учебного курса «Системы искусственного интеллекта» для будущих психологов / Л. Р. Билялова // Январские педагогические чтения. – 2024. – № 10(22). – С. 11-15.

2. Борисов В. В. Нечеткие и нечетко нейросетевые когнитивные модели для анализа систем и проблемных ситуаций – URL: <https://seminar.bicalab.org/meetings/materials/Borisov.pdf>

3. Ватьян А. С. Системы искусственного интеллекта / А. С. Ватьян, Н. Ф. Гусарова, Н. В. Добренко. – СПб: Университет ИТМО, 2022. – 186 с.

4. Гордиенко, Т. П. Педагогические условия обучения дисциплине «Методы математической обработки» / Т. П. Гордиенко, Л. Р. Билялова // Проблемы современного педагогического образования. – 2024. – № 85-2. – С. 117-122.

5. Залесов, С. В. Лесоводство: Учебник / С. В. Залесов. – Екатеринбург: Уральский государственный лесотехнический университет, 2020. – 295 с.

References

1. Bilyalova, L. R. Didactic features of the course "Artificial Intelligence Systems" for future psychologists / L. R. Bilyalova // Yanvarskiye pedagogicheskiye chteniya. – 2024. – No 10(22). – pp. 11-15.

2. Borisov V. V. Fuzzy and fuzzy neural network cognitive models for the analysis of systems and problem situations. – URL: <https://seminar.bicalab.org/meetings/materials/Borisov.pdf>

3. Vat'yan A. S. Artificial Intelligence Systems / A. S. Vat'yan, N. F. Gusarova, N.V. Dobrenko. – SPb: Universitet ITMO, 2022. – 186 p.

4. Gordiyenko, T. P. Pedagogical conditions for teaching the discipline "Methods of mathematical processing" / T. P. Gordiyenko, L. R. Bilyalova // Problemy sovremennogo pedagogicheskogo obrazovaniya. – 2024. – No 85-2. – pp. 117-122.

5. Zalesov, S. V. Forestry / S. V. Zalesov. – Yekaterinburg: Ural'skiy gosudarstvennyy lesotekhnicheskiy universitet, 2020. – 295 p.

DOI: 10.58168/OpEq2025_39-43

УДК 517.95

**ОБ ОДНОЙ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ В
ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С КОМПЛЕКСНЫМИ
ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ**
ON ONE OVERDETERMINED SYSTEM OF PARTIAL DERIVATIVE
EQUATIONS WITH COMPLEX PERIODIC COEFFICIENTS

Джумаев Бустонбек Махмадназарович

кандидат физико-математических наук, зав. кафедрой
математического анализа Худжандского государственного

университета им. академика Б. Гафурова,

г. Худжанд, Республика Таджикистан

Jumaev Bustonbek Makhmadnazarovich

candidate of physical and mathematical sciences, head of the department of
mathematical analysis of the Khujand State University named

after academician B. Gafurov

Khujand, Republic of Tajikistan,

Аннотация. В статье рассматриваются переопределенные системы уравнений в частных производных – обобщенные системы Коши-Римана со многими переменными с комплексными периодическими коэффициентами. Найдена формула общего решения однородной системы. В двумерном случае получены формулы общего решения, а также ограниченных и периодических решений неоднородной системы.

Abstract. The article considers overdetermined systems of partial differential equations – generalized Cauchy-Riemann systems with many variables with complex periodic coefficients. A formula for the general solution of a homogeneous system is

found. In the two-dimensional case, formulas for the general solution, as well as for bounded and periodic solutions of a non-homogeneous system, are obtained.

Ключевые слова: переопределенная система, уравнение в частных производных, общее решение, ограниченные решения, периодические решения.

Keywords: overdetermined systems, partial differential equations, general solution, bounded solution, periodic solution.

В работе рассматривается переопределённая система комплексных уравнений в частных производных с n независимыми переменными вида

$$w_{\bar{z}_j} + a_j w = f_j(z), \quad j = \overline{1, n}, \quad (1)$$

где a_j и f_j – заданные функции переменной z , определённые во всем C^n – n -мерное комплексное евклидово пространство.

Исследуем систему (1) в предположении, что a_j и f_j принадлежат $C_{2\pi}$ – пространство непрерывных в C^n функций $f(z_1, \dots, z_n)$, удовлетворяющих условиям двоякопериодичности [4]:

$$f(z_1, \dots, z_j + h_j, \dots, z_n) = f(z_1, \dots, z_n), \quad (2)$$

здесь $h_j \in \{2\pi, 2\pi i\}$.

Необходимым и достаточным условием полной разрешимости системы (1) будут равенства [2]:

$$\partial_{\bar{z}_k} a_j = \partial_{\bar{z}_j} a_k, \quad (3)$$

$$\partial_{\bar{z}_j} f_k - \partial_{\bar{z}_k} a_j + a_k f_j - a_j f_k = 0, \quad j \neq k. \quad (4)$$

Введем следующие операторы в $C_{2\pi}$ [5]:

$$T_j f = f_0^j \bar{z}_j - 2i \sum_{k \neq 0} k^{-1} f_k^j e^{i(k, z_j)}, \quad (5)$$

где $k = k_1 + ik_2 \in Z^2$ – целочисленная решетка в C^1 , $(k, z_j) = k_1 x_j + k_2 y_j$, f_k^j – коэффициенты Фурье функции f по переменной z_j . А также верны следующие равенства:

$$(T_j f)_{\bar{z}_j} = f, \quad T_j(f_{\bar{z}_j}) = f - f_0^j. \quad (6)$$

Введем также операторы: $S_j f = T_j f - f_0^j \bar{z}_j$, $j = 1, 2$. Очевидно, что $S_j f \in C_{2\pi}$.

Для функций $a_k \in C_{2\pi}$ определим следующие средние значения:

$$a_{k,j} = \gamma_j \int_{K^j} a_k(z) d\omega_j, \quad 1 \leq j \leq n, \quad (7)$$

где $\gamma_j = (2\pi)^{-2j}$, $d\omega_j = dz_1 \cdots dz_j$. Положим, что $a_{k,0} = a_k(z)$. Среднее значение функции a_k по переменной z_j обозначим через $[a_k]_j$. Тогда получим

$$[a_k]_1 = a_{k,1}. \quad (8)$$

Справедлива следующая

Теорема 1. Пусть коэффициенты однородной системы соответствующей (1) принадлежат $C_{2\pi}$ и выполнены условия (3). Тогда общее решение этой системы имеет вид

$$w(z) = e^{-\Omega(z)} \varphi(z), \quad (9)$$

где

$$\Omega(z) = \sum_{j=1}^n T_j a_{j,j-1}, \quad (10)$$

$\varphi(z)$ — произвольная аналитическая по z функция.

В системе (1) предположим, что $n = 2$. Систему запишем в виде

$$\begin{cases} w_{\bar{z}_1} + a(z_1, z_2)w = f(z_1, z_2), \\ w_{\bar{z}_2} + b(z_1, z_2)w = g(z_1, z_2). \end{cases} \quad (11)$$

Необходимые и достаточные условия полной разрешимости (3), (4) для данной системе выглядят так:

$$a_{\bar{z}_2} = b_{\bar{z}_1}, \quad (12)$$

$$-ag + bf + f_{\bar{z}_2} - g_{\bar{z}_1} = 0. \quad (13)$$

Верна следующая теорема

Теорема 2. Пусть коэффициенты однородной системы (11) принадлежат $C_{2\pi}$ и удовлетворяют условию (12). Тогда общее решение этой системы имеет вид

$$w(z_1, z_2) = e^{2im(\bar{a}_0 z_1 + \bar{b}_0 z_2)} \omega_1(z_1, z_2) \omega_2(z_2) \Phi(z_1, z_2), \quad (14)$$

где a_0, b_0 – средние значения функций a, b соответственно, $\omega_1 = e^{-S_1 a}$, $\omega_2 = e^{-S_2 b_0^1}$, Φ – произвольная аналитическая по z_1, z_2 функция.

Пусть $w(z_1, z_2)$ ограниченное во всем C^2 . Тогда решение однородной системы соответствующей (11), будет ограниченной в C^2 и в силу теоремы Лиувилля $\Phi(z_1, z_2) \equiv c$, где c – постоянная. Поэтому все ограниченные в C^2 решения однородной системы имеет вид

$$w(z_1, z_2) = e^{2im(\bar{a}_0 z_1 + \bar{b}_0 z_2)} \omega_1(z_1, z_2) \omega_2(z_2) c, \quad (15)$$

причем все эти решения являются почти-периодическими.

Список литературы

1. Хёрмандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. – М.: Мир, 1986. Т. 2. – 455 с.
2. Михайлов Л. Г. Некоторые переопределенные системы уравнений в частных производных с двумя неизвестными функциями. – Душанбе: Дониш, 2017. – 134 с.
3. N. Taghizadeh, A. Neirameh. Generalization of some overdetermined systems of complex partial differential equations. – Journal of King Saud University – Science, 2011. №23, p. 175–177.
4. Ахиезер И.И. Элементы теории эллиптических функций. – М.: Наука, 1970. – 304 с.
5. Байзаев С. О периодических решениях нелинейной обобщенной системы Коши-Римана. – Доклады АН ТаджССР, 1979. Т.22, №1. С. 3 – 6.
6. Байзаев С. Эллиптические системы с ограниченными коэффициентами на плоскости. Новосибирск, НГУ, 1999. – 74 с.

7. Веква И.Н. Обобщенные аналитические функции. – М.: Наука, 1988. – 509 с.

8. Джумаев Б.М. Об общем решении переопределенной системы уравнений в частных производных с комплексными периодическими коэффициентами / С. Байзаев, Б.М. Джумаев // Известия Академии наук Республики Таджикистан. Отделение физ.-мат., хим., геол. и тех. наук. 2022. №3 (188). – С. 42 – 52.

References

1. Hörmander L. Analysis of linear partial differential operators. – Moscow: Mir, 1986. Vol. 2. – 455 p.

2. Mikhailov L. G. Some overdetermined systems of partial differential equations with two unknown functions. – Dushanbe: Donish, 2017. – 134 p.

3. N. Taghizadeh, A. Neirameh. Generalization of some overdetermined systems of complex partial differential equations. – Journal of King Saud University – Science, 2011. №23, p. 175–177.

4. Akhiezer I.I. Elements of the theory of elliptic functions. – М.: Nauka, 1970. – 304

5. Bayzaev S. On periodic solutions of the nonlinear generalized Cauchy-Riemann system. – Reports of the Academy of Sciences of the Tajik SSR, 1979. Vol. 22, No. 1. P. 3 – 6.

6. Bayzaev S. Elliptic systems with bounded coefficients on the plane. Novosibirsk, NSU, 1999. – 74 p.

7. Vekua I.N. Generalized analytical functions. – М.: Nauka, 1988. – 509 p.

8. Jumaev B.M. On the general solution of an overdetermined system of partial differential equations with complex periodic coefficients / S. Bayzaev, B.M. Djumaev // Bulletin of the Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan. Department of Phys.-Math., Chem., Geol. and Engineering Sciences. 2022. No. 3 (188). - P. 43 - 53.

DOI: 10.58168/OpEq2025_44-49

УДК 517.986

**ОБ ОДНОЙ «МАЛОЙ» АЛГЕБРЕ ОПЕРАТОРОВ, ДЕЙСТВУЮЩИХ В
ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ**

ABOUT ONE "SMALL" ALGEBRA OF OPERATORS ACTING
IN THE WEIGHT SPACES

Кабанко Михаил Владимирович

кандидат физико-математических наук, доцент

доцент кафедры математического анализа и прикладной математики

Курский ГУ, г. Курск, Россия

Мягченкова Елена Леонидовна

старший преподаватель кафедры математического анализа и прикладной

математики, Курский ГУ, г. Курск, Россия

Kabanko Mikhail Vladimirovich

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor

Associate Professor of the Department of Mathematical Analysis and Applied

Mathematics, Kursk State University, Kursk, Russia

Myagchenkova Elena Leonidovna

Senior Lecturer of the Department of Mathematical Analysis and Applied

Mathematics, Kursk State University, Kursk, Russia

Аннотация. В данной работе описывается частный случай семейства гильбертовых пространств. Операторы, отображающие эти пространства в себя, имеют простое представление в виде суммы скалярного оператора и оператора, принадлежащего некоторому операторному идеалу. Ранее В.И. Овчинниковым была высказана гипотеза о связи строения операторов, действующих в интерполяционных семействах с «количеством» интерполяционных пространств. Пример, указанный в работе, подтверждает эту гипотезу.

Abstract. The paper describes a special case of a family of Hilbert spaces. The operators that map these spaces into themselves have a simple representation in the form of the sum of a scalar operator and the operator which belong to some operator ideal. Earlier, V.I. Ovchinnikov hypothesized that the structure of operators operating in interpolation families is related to the "number" of interpolation spaces. The example given in the paper confirms this hypothesis.

Ключевые слова: гильбертово семейство, весовое пространство.

Key words: Hilbert n-tuple, weight space.

Рассмотрим гильбертову пару $\bar{K} = \{l_2(\omega^{-1}), l_2(\omega)\}$ (см. [1]), где веса определены следующим образом $\omega_j = 2^{-2^j}$. Можно легко показать, что сумма пространств $l_2(2^{2^j}) + l_2(2^{-2^j})$ совпадает с пространством $l_2(2^{-2^j})$, а пересечение пространств $l_2(2^{2^j}) \cap l_2(2^{-2^j})$ с пространством $l_2(2^{2^j})$ с равенством норма. Рассмотрим оператор умножения (мультипликатор) действующий по правилу:

$$M_\omega : l_2 \rightarrow l_2, \quad \xi_j \mapsto \omega_j \xi_j$$

Этот оператор отображает изометрично пространство l_2 (см.[2])

Если предположить, что оператор A принадлежит алгебре ограниченных операторов $B(l_2(\omega))$, действующих в весовом пространстве, то можно сделать вывод, что оператор вида $M_\omega A M_\omega^{-1}$ принадлежит алгебре $B(l_2)$. Это, в свою очередь, эквивалентно тому, что матрицу этого оператора можно представить в виде $(2^{-2^j+2^i} a_{ij})_{i,j=1}^\infty$. Таким образом, действие оператора A в весовом пространстве $l_2(\omega)$ накладывает на элементы ее матрицы следующие ограничения

$$|a_{ij}| \leq 2^{-2^i+2^j} \cdot \|A\|_{l_2 \rightarrow l_2}.$$

Рассуждая аналогично, действие оператора A в весовом пространстве $l_2(\omega^{-1})$ будет давать следующую оценку на элементы матрицы:

$$|a_{ij}| \leq 2^{2^i-2^j} \cdot \|A\|_{l_2 \rightarrow l_2}.$$

Таким образом, если оператор A действует в паре $\bar{K} = \{l_2(\omega^{-1}), l_2(\omega)\}$, то элементы матричного представления этого оператора будут подчиняться следующим условиям (см. [3]):

$$|a_{ij}| \leq 2^{-|2^j - 2^i|} \cdot \|A\|_{l_2 \rightarrow l_2}$$

Рассмотрим весовые пространства $l_2(u)$ и $l_2(v)$, в которых веса определены по правилам

$$u_{2^{n-1}} = 2^{2^{2^{n-1}}}, u_{2^n} = 2^{2^{2^n}}, u_{2^{n+1}} = 2^{2^{2^{n+1}}}, u_{2^{n+2}} = 2^{2^{2^{n+2}}}$$

и

$$v_{2^{n-1}} = 2^{-2^{2^{n-1}}}, v_{2^n} = 2^{-2^{2^n}}, v_{2^{n+1}} = 2^{-2^{2^{n+1}}}, v_{2^{n+2}} = 2^{-2^{2^{n+2}}}$$

Эти пространства также образуют гильбертову пару и в ней можно задать действие ограниченного оператора A . Рассуждая аналогично тому, как это сделано для пары \bar{K} , легко найти условия, которые будут верны для элементов матрицы этого оператора.

Пусть оператор A действует ограниченно в пространствах $l_2(u), l_2(v)$, $l_2(\omega^{-1}), l_2(\omega)$. Тогда элементы матрицы этого линейного ограниченного оператора будут ограничены сверху величиной

$$|a_{ij}| \leq 2^{-2^j - 2^i} \cdot \|A\|_{l_2 \rightarrow l_2}$$

Выясним действие операторов A_u и A_l в пространствах $l_2(\omega^{-1}), l_2(\omega)$. Оператор A_u представим в виде

$$A_u = \sum_{k=1}^{\infty} A_k$$

где A_k операторы имеют матрицы вида $(a_{ii+k})_{i=1}^{\infty}$, $k \in \mathbf{N}$. Непосредственными вычислениями можно показать, что каждый оператор A_k отображает $l_2(\omega)$ в $l_2(\omega^{-1})$, т.е. пространство суммы в пространство пересечения.

Оценим нормы операторов A_k как отображение пространства l_2 в пространство $l_2(\omega^{-1})$:

$$\|A_k\|_{l_2 \rightarrow l_2(\omega^{-1})}^2 = \sup_{\|x\|_{l_2} = 1} \|A_k x\|_{l_2(\omega^{-1})}^2 \leq 2^{-2^k} \cdot \|A\|_{l_2 \rightarrow l_2}$$

Следовательно, поскольку нормы операторов A_k имеют указанные выше степенные оценки, оператор A_u образуют, по теореме Вейерштрасса, абсолютно сходящийся ряд и является оператором, который ограниченно действует из l_2 в $l_2(\omega^{-1})$.

Нижнетреугольную часть оператора A также можно представить в виде ряда

$$A_l = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_k$$

где \tilde{A}_k – операторы, имеющие матричное представление $(a_{i+ki})_{i=1}^{\infty}$, с условиями на элементы матрицы

$$|a_{i+ki}| \leq 2^{-2^i - 2^{i+k}} \cdot \|A\|_{l_2 \rightarrow l_2}.$$

Аналогично предыдущим рассуждениям, можно показать, что оператор A_l действует из пространства $l_2(\omega)$ в пространство l_2 .

Определим действие оператора A во всех пространствах $l_2(u), l_2(v), l_2(\omega^{-1}), l_2(\omega)$. Введем в рассмотрение подпространство вида

$$N = \left\{ \{\xi_j\}_{j=1}^{\infty} \in l_2(2^{2^j}) \mid \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j = 0 \right\}$$

Очевидно, что оно является ядром неограниченного в пространстве l_2 функционала. Положим, что оператор A действует из подпространство N в себя. Тогда образом вектора $x = \{\xi_j\}_{j=1}^{\infty}$ будет вектор

$$y = \{\zeta_i\}_{i=1}^{\infty} = \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} a_{1j} \xi_j, \sum_{j=1}^{\infty} a_{2j} \xi_j, \dots, \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj} \xi_j, \dots \right\}$$

и будет верно

$$\sum_{i=1}^{\infty} \zeta_i = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \xi_j = 0.$$

Так как $y \in l_2(2^{2^j})$ то последний ряд абсолютно сходится и изменив порядок суммирования в последнем выражении, получим

$$\sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} \right) = 0$$

Последовательность $\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} \right\}_{j=1}^{\infty}$ является функционалом для $x = \{\xi_j\}_{j=1}^{\infty}$ в пространстве $l_2(2^{2^j})$ и следовательно принадлежит двойственному пространству $l_2(2^{-2^j})$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} = \lambda$$

Таким образом, элементы матрицы A , стоящие на главной диагонали можно представить в виде

$$a_{jj} = \lambda - \sum_{i \neq j}^{\infty} a_{ij}.$$

Из этих рассуждений легко следует, что оператор A имеет представление $A = \lambda I + T$, где T – оператор, имеющий матрицу $(t_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$:

$$t_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, i \neq j \\ -\sum_{i \neq j}^{\infty} a_{ij}, i = j \end{cases}$$

Непосредственными вычислениями можно показать, что внескалярная часть этого оператора отображает сумму пространств в пересечение.

Список литературы

1. Овчинников, В.И. Интерполяция в симметрично-нормированных идеалах операторов, действующих в различных пространствах/В.И. Овчинников// Функц. анализ и его прил. 1994. № 28(3) С.80-82
<http://mi.mathnet.ru/rus/faa/v28/i3/p80>

2. Ovchinnikov, V.I. Operator ideals and interpolation in Hilbert couples/ V.I.Ovchinnikov// Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. 2014. № 2 С.142-161 <http://www.vestnik.vsu.ru/pdf/physmath/2014/02/2014-02-13.pdf>

3. Кабанко, М.В. Алгебра операторов, действующих в гильбертовой паре/ М.В. Кабанко// Труды математического факультета ВГУ, 2001. № 6. С.54-61 https://www.researchgate.net/publication/390597158_Algebra_of_operators_acting_in_Hilbert_couple?channel=doi&linkId=67f57d2803b8d7280e2f642c&showFulltext=true

References

1. Ovchinnikov, V. I. Interpolation of Cross-Normed Ideals of Operators Defined on Different Spaces/ V. I. Ovchinnikov// Funct. Anal. Appl., **28**:3 (1994), 213–215 <http://mi.mathnet.ru/rus/faa/v28/i3/p80>

2. Ovchinnikov, V.I. Operator ideals and interpolation in Hilbert couples/ V.I.Ovchinnikov// Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. 2014. № 2 С.142-161 <http://www.vestnik.vsu.ru/pdf/physmath/2014/02/2014-02-13.pdf>

3. Kabanko, M.V. The Algebra of Operators Acting in the Hilbert Couple/ M.V. Kabanko // Transactions of the Mathematical Faculty VSU, 2001. Issue 6. P.54-61 https://www.researchgate.net/publication/390597158_Algebra_of_operators_acting_in_Hilbert_couple?channel=doi&linkId=67f57d2803b8d7280e2f642c&showFulltext=true

DOI: 10.58168/OpEq2025_50-55

УДК 549.22 (075.8)

**ОБРАБОТКА МАССИВОВ СТАТИСТИЧЕСКИХ ДАННЫХ БОЛЬШОЙ
РАЗМЕРНОСТИ С ОБОСНОВАНИЕМ КЛАСТЕРИЗАЦИОННОГО
ПРАВИЛА**

**PROCESSING OF LARGE-DIMENSIONAL STATISTICAL DATA ARRAYS
WITH JUSTIFICATION OF THE CLUSTERING RULE**

Калач Андрей Владимирович

Доктор химических наук, профессор, начальник кафедры безопасности и защиты сведений, составляющих государственную тайну ВИ ФСИН России, г.

Воронеж, Россия

Ковальчук Андрей Александрович

Соискатель, ВГТУ, г. Воронеж, Россия

Ряжских Виктор Иванович

доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики и механики ВГТУ, г. Воронеж, Россия

Kalach Andrey Vladimirovich

Doctor of Chemical Sciences, Professor, head of the Department
Voronezh Institute of the Federal Penitentiary Service of Russia
Voronezh, Russia

Kovalchuk Andrew Aleksandrovich

the applicant, Voronezh State Technical University, Voronezh, Russia

Ryazhskikh Viktor Ivanovich

D.S. of Technical, Professor, Head of the Department of Applied Mathematics and
Mechanics, Voronezh State Technical University, Voronezh, Russia

Аннотация. Проведен анализ снижения размерности исходных статистических данных с применением кластерного правила с группировкой независимых параметров для обеспечения расположения их среднего значения в группах по возрастанию. Это дало возможность сформулировать задачу отыскания коэффициентов линейного уравнения пространственной регрессии, которая решена путем проецирования значений зависимой величины на координатные плоскости с применением метода наименьших квадратов и целевой функции в виде суперпозиций квадратов отклонений. Проецирование одного из регрессионных уравнений формата 2-D на плоскость, параллельную оси значений зависимой переменной, позволило идентифицировать через параметрическое регрессионное уравнение прямой в пространстве. Приведен пример расчета.

Abstract. The analysis of the reduction of the dimensionality of the initial statistical data was carried out using the cluster rule with grouping of independent parameters to ensure the arrangement of their average value in groups in ascending order. This made it possible to formulate the problem of finding the coefficients of the linear equation of spatial regression, which was solved by projecting the values of the dependent variable onto coordinate planes using the least squares method and the objective function in the form of superpositions of squared deviations. Projecting one of the regression equations of the 2-D format onto a plane parallel to the axis of the values of the dependent variable made it possible to identify a straight line in space through a parametric regression equation. An example of calculation is given.

Ключевые слова: кластеризация данных, статистические массивы, метод наименьших квадратов, пространственная регрессия.

Keywords: data clustering, statistical arrays, least squares method, spatial regression.

Необходимость построения аналитических соотношений на поле неупорядоченных данных различной предметной направленности часто

возникает в практической реализации вспомогательных формализаций при генерации феноменологических моделей [1]. Особенно эта проблема трудно формализуется в многомерном случае, когда требуемая величина должна быть идентифицирована на различных метриках. В данном случае синтезируется построение системы разнородных параметров, определяющих некую наблюдаемую величину. Выбор реперной шкалы строится по принципу возрастания, имитирующей числовую дискретную ось. Другая шкала формируется за счет упорядоченных кластерных массивов с неубывающей мощностью и инвариантной параметрической характеристикой с применением метода пассивной стратегии [2].

При таком подходе создается упорядоченное поле, на котором однозначным образом определяется значение рассматриваемого зависимого параметра с построением для него, например, регрессивного соотношения технологией минимизации интегрального квадратичного отклонения [3].

Пусть после кластеризации исходные статистические данные представлены в табличном виде:

z^j	z_1	...	z_i	...	z_n
x^j	x_1	...	x_i	...	x_n
y^j	y_1	...	y_i	...	y_n

Табл.1. Исходные данные.

Будем рассматривать декомпозицию данных на координатные (оху), (охz), (оуз), считая систему координат охуз ортогональной. Допустим линейную структуру регрессионных уравнений на соответствующих координатных плоскостях

$$y^T = a_0 + a_1x, z_1^T = b_0 + b_1x, z_2^T = c_0 + c_1y, \quad (1)$$

где $a_0, a_1, b_0, b_1, c_0, c_1$ - неизвестные параметры, подлежащие определению.

Составим суперпозиционную целевую функцию

$$\Phi(a_0, a_1, b_0, b_1, c_0, c_1) = \sum_{i=1}^n \left[(y_i^{\vartheta} - y_i^T)^2 + (z_i^{\vartheta} - z_{1i}^T)^2 + (z_i^{\vartheta} - z_{2i}^T)^2 \right], \quad (2)$$

которую минимизируем с помощью совокупности необходимых условий существования экстремума

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_0} = \frac{\partial \Phi}{\partial a_1} = \frac{\partial \Phi}{\partial b_0} = \frac{\partial \Phi}{\partial b_1} = \frac{\partial \Phi}{\partial c_0} = \frac{\partial \Phi}{\partial c_1} = 0. \quad (3)$$

Из (1) – (3) следует система линейных уравнений для определения $a_0, a_1, b_0, b_1, c_0, c_1$:

$$na_0 + \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) a_1 = \sum_{i=1}^n y_i^{\vartheta}; \quad (4)$$

$$nb_0 + \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) b_1 = \sum_{i=1}^n z_i^{\vartheta}; \quad (5)$$

$$nc_0 + \left(\sum_{i=1}^n y_i \right) c_1 = \sum_{i=1}^n z_i^{\vartheta}; \quad (6)$$

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i \right) a_0 + \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) a_1 = \sum_{i=1}^n y_i^{\vartheta} x_i; \quad (7)$$

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i \right) b_0 + \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) b_1 = \sum_{i=1}^n z_i^{\vartheta} x_i; \quad (8)$$

$$\left(\sum_{i=1}^n y_i \right) c_0 + \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right) c_1 = \sum_{i=1}^n z_i^{\vartheta} y_i. \quad (9)$$

Уравнение плоскости

$$-a_1 x + y + 0 \cdot z - a_0 = 0, \quad (10)$$

которое параллельно оси oz пересекается с плоскостью, например,

$$-b_1 x + 0 \cdot y + z - b_0 = 0, \quad (11)$$

по прямой, у которой направляющий вектор определяется из соотношения (см. (10) и (11))

$$\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -a_1 & 1 & 0 \\ -b_1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = p_1 \bar{i} + p_2 \bar{j} + p_3 \bar{k}, \quad (12)$$

где $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ орты ортогональной системы координат $oxyz$. Если $(\bullet)M(x_0, y_0, z_0)$ принадлежит этой прямой, то регрессионное уравнение будет иметь следующий вид:

$$\frac{x - x_0}{p_1} = \frac{y - y_0}{p_2} = \frac{z - z_0}{p_3}. \quad (13)$$

Введем параметр t следующим образом

$$\frac{x - x_0}{p_1} = t, \quad \frac{y - y_0}{p_2} = t, \quad \frac{z - z_0}{p_3} = t. \quad (14)$$

Из первых двух соотношений (14) имеем

$$x = x_0 + p_1 t, \quad y = y_0 + p_2 t,$$

откуда

$$\frac{x}{y} = \frac{x_0 + p_1 t}{y_0 + p_2 t}$$

и поэтому

$$t = \frac{yx_0 - xy_0}{xp_2 - yp_1},$$

что в итоге дает структуру регрессионного пространственного уравнения

$$z = z_0 + \left(\frac{yx_0 - xy_0}{xp_2 - yp_1} \right) p_3. \quad (15)$$

Список литературы

1. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р., Штайн К. Алгоритмы: построения и анализ. – М.: ООО «И.Д. Вильямс», 2013. – 1328с.
2. Соловьев С.В. Методы оптимизации. Примеры и задачи. – Хабаровск: Изв-во Тихоокеан. гос. ун-та, 2017. – 164с.
3. Семушин И.В. Наименьшие квадраты от теории к алгоритмам. Часть I. Теория. – Ульяновск: УлГУ, 2005. – 90с.

References

1. Cormen T., Leiserson C., Rivest R., Stein K. Algorithms: constructions and analysis. – M.: ООО I.D. Williams, 2013. – 1328 p.
2. Soloviev S.V. Optimization methods. Examples and tasks. – Khabarovsk: Izv-vo Pacific. state. university, 2017. – 164s.
3. Semushin I.V. Least squares from theory to algorithms. Part I. Theory. – Ulyanovsk: UlGU, 2005. – 90 p.

DOI: 10.58168/OpEq2025_56-63

УДК 519.23

**СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДИНАМИКИ ЛЕСНОГО СЕКТОРА
РЕГИОНА (НА ПРИМЕРЕ ЛИПЕЦКОЙ ОБЛАСТИ)**
STATISTICAL ANALYSIS OF THE DYNAMICS OF THE FOREST SECTOR
IN THE REGION (USING THE EXAMPLE OF THE LIPETSK REGION)

Карлова Маргарита Юрьевна

кандидат экономических наук, доцент,
доцент кафедры математики и физики

ЛГПУ имени П. П. Семенова-Тян-Шанского, г. Липецк, Россия

Фомина Татьяна Петровна

кандидат физико-математических наук, доцент,
доцент кафедры математики и физики

ЛГПУ имени П. П. Семенова-Тян-Шанского, г. Липецк, Россия

Karlova Margarita Yurievna

Candidate of Economic Sciences, Associate Professor,
Associate Professor at the Department of Mathematics and Physics
LGPU named after P. P. Semenov-Tyan-Shansky, Lipetsk, Russia

Fomina Tatiana Petrovna

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor at the Department of Mathematics and Physics
LGPU named after P. P. Semenov-Tyan-Shansky, Lipetsk, Russia

Аннотация. Природно-ресурсный потенциал, одним из главных компонентов которого являются лесные ресурсы, во многом определяет социально-экономическое положение государства. В статье авторы исследуют динамику развития лесного сектора Липецкой области, проводят анализ

статистических показателей данного кластера, выявляют особенности регионального комплекса.

Abstract. The natural resource potential, one of the main components being timber resources, largely determines the socio-economic situation of the state. In the article the authors study the dynamics of development of the forestry sector of the Lipetsk region, analyze the statistical indicators of this cluster, identify the features of the regional complex.

Ключевые слова: лесной сектор региона, прикладная математика, статистический анализ.

Keywords: the forest sector of the region, applied mathematics, statistical analysis.

Российские леса составляют почти одну четвертую мировых запасов древесины и являются самым большим углеродным стоком на планете.

Липецкая область входит в состав Центрального федерального округа, Центрально-Черноземного макрорегиона и экономического района и расположена в центре Восточно-Европейской равнины, на границе Среднерусской возвышенности и Окско-Донской равнины, что определило ландшафт региона – в основном лесостепь. В области распространены сосново-широколиственные, березовые и осиновые леса, небольшие дубравы: сосна – лесообразующая хвойная порода, дуб – лесообразующая лиственная порода. Крупные лесные массивы расположены по левому берегу реки Воронеж: Усманский бор – часть Воронежского государственного природного биосферного заповедника им. В.М. Пескова. Существующий с 1925 года заповедник «Галичья гора» объединяет участки реликтовой флоры в долине реки Дон.

Развитие и использование потенциала лесного сектора в регионе играет важную роль в его социально-экономическом развитии [4]. Проблемы в данном комплексе могут стать не только реальным ограничителем в устойчивом

развитии региона, но и экологическим риском. Цель работы – исследование динамики лесного сектора Липецкой области на основе статистического анализа. Информационной базой исследования стали официальные статистические данные, полученные из открытых источников [3]. В ходе исследования были проанализирована динамика с 2010 по 2023 годы семи показателей, характеризующих развитие лесного сектора Липецкой области: X1 – лесовосстановление, тыс. га; X2 – число лесных пожаров, ед.; X3 – площадь лесных земель, пройденная пожарами, га; X4 – число предприятий и организаций (на конец года), работающих в лесном секторе, ед.; X5 – среднегодовая численность работников организаций, работающих в лесном секторе, чел.; X6 – производство древесины необработанной, тыс. плотных куб. м; X7 – площадь земель лесного фонда, тыс. га. В анализе использовались методы общей теории статистики (метод группировок, графический и табличный методы, анализ структуры и динамики) и математической статистики: корреляционный и регрессионный анализ.

Лесовосстановление в области – одно из приоритетных направлений. Благодаря национальному проекту «Экология» (2019-2024 гг.) на территории региона реализован региональный проект «Сохранение лесов», результат – площадь лесовосстановления и лесоразведения превысила площадь вырубленных и погибших лесных насаждений [2]. В 2023 году по сравнению с 2022 годом площадь земель лесного фонда в регионе увеличилась на 1 тыс. га или на 0.5%. Максимальный прирост показателя наблюдался в 2017 году (13 тыс. га). В 2023 году по сравнению с 2010 годом площадь земель лесного фонда увеличилась на 28 тыс. га или на 15.3%. В среднем площадь земель лесного фонда ежегодно увеличивается на 1.1% или на 2.15 тыс. га, среднее значение показателя с 2010 по 2023 годы составило 196.67 тыс. га. Расчёт показателей динамики показал, что в 2023 году по сравнению с 2022 годом увеличения лесовосстановления в области не произошло, максимальный прирост показателя наблюдался в 2011 году – 1 тыс. га, минимальный – зафиксирован в 2017

(сокращение на 0.8 тыс. га). Темп наращивания свидетельствует о возрастающей тенденции лесовосстановления в регионе.

С 2015 года Липецкая область – единственная в России, где не было ни одного лесного пожара: во всех лесничествах ставка сделана на профилактическое предупреждение происшествий с огнём. Установлено, что все небольшие лесные пожары были обнаружены в процессе наземного мониторинга и локализованы в первые сутки после их обнаружения [1]. В регионе не зафиксировано за последние годы крупных возгораний в лесном секторе, что говорит о сложившейся убывающей тенденции.

В 2023 году в Липецкой области работало в области лесного хозяйства 4 предприятия. Максимальный прирост показателя наблюдался в 2016 году – в регионе открылось 4 новых предприятия (всего было 11 предприятий и организаций), в 2019 произошло их сокращение (ушли с рынка 6).

В 2023 году по сравнению с годом ранее среднегодовая численность работников организаций уменьшилось на 23 человека или на 11.6%. Максимальный прирост показателя наблюдался в 2018 году (209 чел.), в 2017 году зафиксирован рекордный отток рабочей силы из лесного сектора (сокращение на 154 человек). В сравнении с 2010 годом в 2023 году среднегодовая численность работников организаций уменьшилась на 56 человек или на 24.1%. В исследуемом периоде в среднем среднегодовая численность работников организаций лесного сектора в регионе ежегодно сокращалась на 2.1% или на 5 человек.

В 2023 году в регионе по сравнению с годом ранее производство необработанной древесины увеличилось на 19.9 тыс. плотных куб. м или на 20.5%. Максимальный прирост наблюдался в 2018 (29 тыс. плотных куб. м), существенное сокращение показателя зафиксировано за исследуемый период в 2012 (-89.3 тыс. плотных куб. м). Темп наращивания показывает, что тенденция ряда возрастающая, что свидетельствует об ускорении производства необработанной древесины в области. В сравнении с 2010 годом в 2023

производство древесины необработанной в регионе уменьшилось на 45.6 тыс. плотных куб. м или на 28%.

На основе критерия Ирвина (на уровне значимости 0,05 и $\lambda_k=1,3$) выявлено наличие аномальных значений во всех исследуемых временных рядах, кроме ряда X7 – площадь земель лесного фонда(табл.1).

Таблица 1 – Результаты по критерию Ирвина

Ряд	Аномальные значения		Ряд	Аномальные значения		
X1	2011	1,4	X5	2011	125	
	2017	0,6		2013	322	
X2	2011	22		2014	229	
X3	2011			2017	16	
				2018	225	
X4	2016	11	X6	2012		49,7
	2019	6				

На основе достаточно мощного критерия, улавливающего смещение оценки математического ожидания монотонного и периодического характера, – "восходящих" и "нисходящих" серий на уровне значимости 0,05 установлено наличие линейного тренда в ряду «Площадь земель лесного фонда» (рис.1), ошибка аппроксимации составила 1,63%, что свидетельствует о хорошем подборе модели к исходным данным. Достаточно близкое к нулю значение коэффициента несоответствия Тейла – 0,0205 подтверждает малую погрешность и хорошую точность прогноза по построенной модели. На основе построенной модели в Липецкой области отмечаем ежегодное увеличение площади земель лесного фонда в среднем на 2.5 тыс. га.

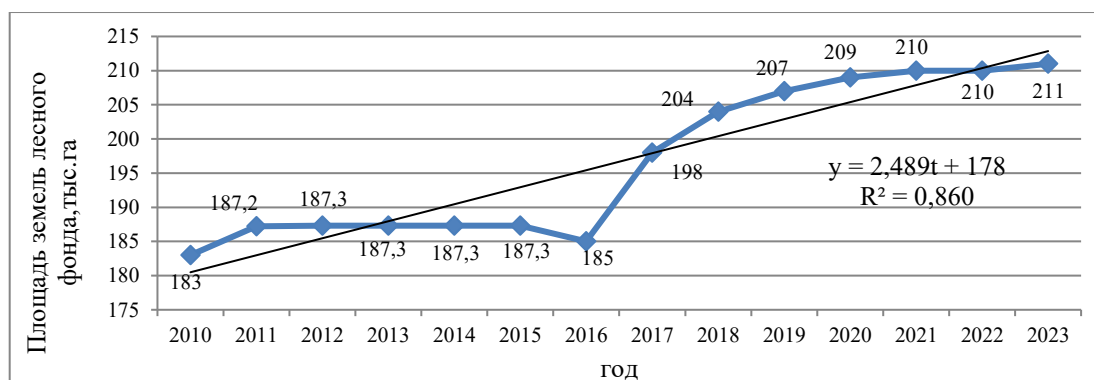


Рисунок 1 –Тренд в ряду «Площадь земель лесного фонда»

Статистическая значимость уравнения проверена с помощью коэффициента детерминации ($R^2=0,86$) и критерия Фишера ($F_{кр}(1;12;0.05) = 4.7472, F=73,79$). Проведённый анализ точности определения оценок параметров уравнения тренда (стандартная ошибка уравнения – 4,37 тыс. га, параметров соответственно – 2,45 и 0,29), подтвердил хорошую точность модели. На основе критерия Стьюдента подтверждена статистическая значимость коэффициентов модели ($T_{табл}(12;0.025) = 2.56, t_a=8,59, t_b=72,14$). Доверительные интервалы коэффициентов тренда с надёжностью 95% (1.75;3.23) и (171.69;184.32) соответственно. Рассчитанное значение коэффициента автокорреляции свидетельствует об отсутствии в исследуемом ряду автокорреляции первого порядка ($-0.684 < r_1 = 0.577 < 0.684$) и выполнении условия независимости остатков, однако критерий Дарбина – Уотсона на уровне значимости 5% уловил присутствие автокорреляции остатков ($d_1 = 1.08; d_2 = 1.36, DW=0,8$). Проверка нормальности распределения остаточной компоненты на основе RS-критерия ($RS=3,49$) подтвердила адекватность модели по нормальности распределения остаточной компоненты.

Прослеживается прямая положительная корреляционная зависимость между ВРП (в текущих основных ценах, млн. руб.) Липецкой области и производством необработанной древесины в регионе (табл.1). Доходы от использования лесов за первое полугодие 2023 года превысили 18,6 млн. руб., что на 8% больше, чем доходы за аналогичный период 2022 года. За первое полугодие 2023 года Липецкая область направила в федеральную казну более 14,2 млн. руб., что на 15% больше, чем за первое полугодие 2022 года. Доходы, направленные в региональный бюджет, выросли на 6% и составили порядка 4,4 млн. руб. [1]. Полученные результаты согласуются с результатами проведённого корреляционного анализа (табл.2).

С 2018 года ежегодно в Липецкой области привлекаются инвестиции, направленные на охрану и рациональное использование лесных ресурсов. Доля природоохранных инвестиций в основной капитал демонстрирует устойчивое увеличение, в структуре природоохранных расходов растёт доля текущих затрат на охрану и рациональное использование лесных ресурсов (табл. 3)

Таблица 2 – Матрица парных коэффициентов корреляции показателей, характеризующих развитие лесного сектора Липецкой области и ВРП региона

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	ВРП
X1	1,000						
X 2	0,998	1,000					
X 3	-0,186	-0,191	1,000				
X 4	0,158	0,172	-0,390	1,000			
X 5	0,423	0,411	0,058	-0,272	1,000		
X 6	-0,366	-0,348	-0,294	-0,121	0,405	1,000	
ВРП	-0,387	-0,365	-0,268	-0,171	0,222	0,889	1,000

Таблица 3 – Инвестиции в основной капитал, направленные на охрану и рациональное использование лесных ресурсов по Липецкой области [3]

	2010	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022
Инвестиции в основной капитал (млн. руб.), из них на:	4251,3	3164,0	3506,6	2038,0	4396,0	4741,5	5514,1	15391,8	10445,6
охрана и рациональное использование лесных ресурсов					2,5	9,9	0,1	4,9	5,5
Инвестиции в основной капитал (в процентах к предыдущему году), из них на:	106,2	177,2	104,2	57,3	в 2,1 п.	100,0	108,6	в 2,7 п.	58,6
охрана и рациональное использование лесных ресурсов					21,8	в 3,7 п.	1,0	в 42,2 п.	97,8

Таким образом, на основе проведения статистического анализа в развитии лесного сектора Липецкой области выявлены следующие особенности:

– в регионе активно решается проблема лесовосстановления, это благоприятно складывается на экономике и экологии региона, что было отмечено на федеральном уровне;

– средства, поступившие в бюджет от производства необработанной древесины в регионе, идут на лесовосстановление, закупку лесохозяйственной и лесопожарной техники, финансирование лесничеств, уход за молодняком, лечение деревьев, формирование запаса лесных семян;

– производство необработанной древесины в области активно развивается, в качестве причин назовём низкую цену за куб, широкое применение в строительстве, простая переработка;

– в регионе применяются различные способы по утилизации древесных отходов: изготовление упаковки, производство строительных материалов, получение биотоплива или технического спирта, среды для выращивания грибов, щепки для копчения продуктов, утепление домов; вторичная переработка древесины и правильная утилизация позволяют снизить попадание вредных веществ в окружающую среду.

Список литературы

1. Министерство лесного хозяйства Липецкой области. – URL: <https://leslipetsk.ru/>.

2. Реализация регионального проекта «Сохранение лесов» в Липецкой области. – URL: <https://rosleshoz.gov.ru/news/tsfo/realizatsiya-regionalnogo-proekta-sokhranenie-lesov-v-lipetskoy-oblasti-tsfo-75488/>.

3. Регионы России. Социально-экономические показатели. – URL: <https://rosstat.gov.ru/folder/210/document/13204>.

4. Шишелов М.А. Оценка ресурсной эффективности лесного комплекса России: методология и практика / М. А. Шишелов, В. А. Носков // Научные труды. Институт народнохозяйственного прогнозирования РАН. 2023. № 3. С. 124-144.

References

1. Ministry of Forestry of the Lipetsk Region. – URL: <https://leslipetsk.ru/>.

2. Implementation of the regional project "Forest Conservation" in the Lipetsk region. – URL: <https://rosleshoz.gov.ru/news/tsfo/realizatsiya-regionalnogo-proekta-sokhranenie-lesov-v-lipetskoy-oblasti-tsfo-75488/>.

3. Regions of Russia. Socio-economic indicators. – URL: <https://rosstat.gov.ru/folder/210/document/13204>.

4. Shishelov M. A. Assessment of resource efficiency of the Russian forest complex: methodology and practice / M. A. Shishelov, V. A. Noskov // Scientific works. Institute of National Economic Forecasting of the Russian Academy of Sciences. 2023. No. 3. Pp. 124-144.

DOI: 10.58168/OpEq2025_64-70

УДК 517.95

**ОБ ОПЕРАТОРАХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ТИПА ВЕКУА-ЭРДЕЙИ-
ЛАУНДЕСА**

ON VEKUA-ERDELYI-LOWNDES TYPE TRANSMUTATION

Каятский Артем Викторович

студент 3 курса факультета прикладной математики, информатики и
механики, ВГУ, г. Воронеж, Россия

Шишкина Элина Леонидовна

доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры
математического и прикладного анализа, ВГУ, г. Воронеж, Россия

Kayatskiy Artem Viktorovich

3rd year student of the Faculty of Applied Mathematics, Informatics and
Mechanics, Voronezh State University, Voronezh, Russia

Shishkina Elina Leonidovna

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, docent, Professor of the
Department of Mathematical and Applied Analysis,
Voronezh State University, Voronezh, Russia

Аннотация. В статье построены операторы преобразования типа Векуа-Эрдейи-Лаундеса, действующие по первой производной. Такие операторы применимы для решения широкого круга задач для уравнений типа теплопроводности.

Abstract. The article develops transformation operators of the Vekua-Erdelyi-Lowndes type that operate on the first derivative. These operators are useful for addressing a broad spectrum of problems related to heat conduction equations.

Ключевые слова: оператор преобразования, сплетающее свойство, интегральный оператор, ядро, операторы Векуа-Эрдейи-Лаундеса, оператор Вольтерра, сплетающий оператор.

Keywords: transformation operator, entanglement property, integral operator, kernel, Vekua-Erdelyi-Lowndes operators, Volterra operator, intertwining operator.

Введение

Дадим определение оператора преобразования, следуя [1]. Пусть у нас есть два оператора (A, B) . Ненулевой оператор T называется *оператором преобразования*, если выполняется следующее соотношение

$$TA = BT. \quad (1)$$

Соотношение (1) называется *сплетающим свойством*, а оператор T также называют *сплетающим оператором*.

Оператор T обычно является интегральным оператором с некоторым ядром, вид которого иногда можно найти явно.

Первостепенное значение для метода операторов преобразования имеет выбор соответствующих пространств функций, где справедливо равенство (1).

В нашей статье получен специальный класс операторов преобразования, которые сплетают операторы $A + \lambda_1$ и $A + \lambda_2$, где $A: L_1 \rightarrow L_2$ – некоторый оператор, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$. Такие операторы преобразования появляются в работах А. Эрдейи, И. Н. Векуа и Дж. С. Лаундеса (см. ссылки в [2]). Поэтому их естественно называть операторами *Векуа-Эрдейи-Лаундеса* (ВЭЛ).

Используя оператор преобразования ВЭЛ, получим утверждение о связи между решениями задач Коши для уравнений $w_t = Aw$ и $w_t \pm c^2 w = Aw$, где $w = w(x, t)$, $t, c \in \mathbb{R}$, A – линейный оператор, действующий по $x \in \mathbb{R}^n$. К этому типу относятся, например, уравнение теплопроводности, одномерное уравнение Шрёдингера. Такие уравнение часто встречается в теории тепло- и

массопереноса. Они описывают нестационарные тепловые процессы в покоящейся среде или твердом теле с постоянной температуропроводностью.

**Построение операторов преобразования Векуа-Эрдейи-Лаундеса
для первой производной в форме операторов Вольтерра второго рода**

В этом разделе мы строим операторы преобразования L_c^\pm со сплетающим свойством $L_c^\pm Df = (D \pm c^2)L_c^\pm f$. Процесс построения включает интегрирование по частям и дифференцирование интеграла по параметру, а также решение линейного однородного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка.

Теорема 1. Пусть $f \in C^1$. Операторы преобразования L_c^\pm , удовлетворяющие тождеству

$$L_c^\pm Df = (D \pm c^2)L_c^\pm f, \quad (2.1)$$

где $D = \frac{d}{dt}$, имеют вид операторов Вольтерра

$$(L_c^\pm f)(t) = \int_{-t}^t K^\pm(t, \tau) f(\tau) d\tau, \quad (2.2)$$

ядра которых имеют вид

$$K^\pm(t, \tau) = e^{\mp c^2 \tau} \cdot \Phi(\pm(t - \tau)), \quad (2.3)$$

где $\Phi(s)$ – произвольная непрерывно дифференцируемая функция.

При дополнительных условиях

$$\frac{dK^+(t, -t)}{dt} = -\frac{c^2}{2}, \quad K^+(t, t) = 0,$$

ядро K^+ имеет вид $K^+(t, \tau) = -\frac{c^2}{4}(t - \tau) e^{-\frac{c^2}{2}(t+\tau)}$.

При дополнительных условиях

$$\frac{dK^-(t, -t)}{dt} = \frac{c^2}{2}, \quad K^-(t, t) = 0,$$

ядро K^- имеет вид $K^-(t, \tau) = -\frac{c^2}{4}(\tau - t) e^{\frac{c^2}{2}(t+\tau)}$.

Доказательство.

Мы ищем оператор преобразования, удовлетворяющий тождеству (2.1) в форме оператора Вольтерра (2.2). Здесь ядро $K^\pm(t, \tau)$ гладкое по обоим переменным.

Рассмотрим случай $L_c^+ Df = (D + c^2)L_c^+ f$. Подстановка в (2.1) приводит к соотношению

$$\int_{-t}^t K^+(t, \tau) f'(\tau) d\tau = \frac{d}{dt} \int_{-t}^t K^+(t, \tau) f(\tau) d\tau + c^2 \int_{-t}^t K^+(t, \tau) f(\tau) d\tau.$$

Поскольку

$$\int_{-t}^t K^+(t, \tau) f'(\tau) d\tau = K^+(t, t)f(t) - K^+(t, -t)f(-t) - \int_{-t}^t K_\tau^+(t, \tau) f(\tau) d\tau$$

и

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{-t}^t K^+(t, \tau) f(\tau) d\tau &= \\ &= \int_{-t}^t K_t^+(t, \tau) f(\tau) d\tau + K^+(t, t)f(t) - K^+(t, -t)f(-t), \end{aligned}$$

то мы получаем

$$-K_\tau^+(t, \tau) = K_t^+(t, \tau) + c^2 K^+(t, \tau). \quad (2.4)$$

Пусть $K^+(t, \tau) \in C^1(\Omega), \bar{\Omega} \cap \{(t, \tau) \mid t = \tau\} \neq \emptyset$. Уравнение (2.4) является линейным однородным дифференциальным уравнением в частных производных первого порядка. Запишем его в виде

$$K_\tau^+(t, \tau) + K_t^+(t, \tau) = -c^2 K^+(t, \tau). \quad (2.5)$$

Используя метод характеристик Лагранжа для решения уравнения в частных производных первого порядка для уравнения (2.5) составим систему уравнений

$$\frac{d\tau}{1} = \frac{dt}{1} = -\frac{dK^+(t, \tau)}{c^2 K^+(t, \tau)} = ds.$$

Найдем первое характеристическое уравнение:

$$\frac{d\tau}{1} = \frac{dt}{1} \Rightarrow \tau - t = C_1.$$

Найдем второе характеристическое уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{d\tau}{1} &= -\frac{dK^+(t, \tau)}{c^2 K^+(t, \tau)} \Rightarrow \tau = -\frac{1}{c^2} \ln(c^2 K^+(t, \tau)) \Rightarrow \\ -c^2 \tau &= \ln(c^2 K^+(t, \tau)) \Rightarrow c^2 \ln e^\tau + \ln(c^2 K^+(t, \tau)) = 0 \Rightarrow \\ \ln e^{c^2 \tau} + \ln(c^2 K^+(t, \tau)) &= 0 \Rightarrow \ln(c^2 e^{c^2 \tau} K^+(t, \tau)) = 0 \Rightarrow \\ K^+(t, \tau) \cdot e^{c^2 \tau} &= C_2. \end{aligned}$$

Тогда общее решение уравнения (2.5) имеет вид

$$K^+(t, \tau) \cdot e^{c^2 \tau} = \Phi(t - \tau)$$

где $\Phi(t - \tau)$ – произвольная непрерывно дифференцируемая функция. Таким образом

$$K^+(t, \tau) = e^{-c^2 \tau} \cdot \Phi(t - \tau). \quad (2.6)$$

Чтобы найти функцию $\Phi(t - \tau)$, введем дополнительные условия:

$$\frac{dK^+(t, -t)}{dt} = -\frac{c^2}{2}, \quad (2.7)$$

$$K^+(t, t) = 0. \quad (2.8)$$

Теперь найдем такую функцию $\Phi(t - \tau)$, чтобы условия (2.7) и (2.8) выполнялись. Введение новых переменных

$$u = \frac{t + \tau}{2}, \quad v = \frac{t - \tau}{2} \Rightarrow t = u + v, \quad \tau = u - v \quad (2.9)$$

и использование обозначений $H^+(u, v) = K^+(u + v, u - v) = K^+(t, \tau)$ дает задачу

$$\begin{aligned} H_v^+(u, v) &= -c^2 H^+(u, v) \\ H^+(0, v) &= -\frac{c^2}{2} v \end{aligned} \quad (2.10)$$

Теперь запишем равенство (2.10) с учетом замены (2.9)

$$H^+(u, v) = e^{-c^2(u-v)} \cdot \Phi(2v). \quad (2.11)$$

Из условия (2.10) получаем

$$H^+(0, v) = e^{c^2 v} \cdot \Phi(2v) = -\frac{c^2}{2} v.$$

Тогда

$$\Phi(2v) = e^{-c^2 v} \cdot \left(-\frac{c^2}{2} v\right). \quad (2.12)$$

Подставим (2.12) в (2.11), получим

$$H^+(u, v) = -\frac{c^2}{2} v e^{-c^2 v}.$$

Возвращаясь к $K^+(t, \tau)$, получаем

$$K^+(t, \tau) = -\frac{c^2}{4} (t - \tau) e^{-\frac{c^2}{2}(t+\tau)}. \quad (2.13)$$

Легко видеть, что $K^+(t, t) = 0$, а $K^+(t, -t) = -\frac{c^2}{2} t \Rightarrow \frac{dK^+(t, -t)}{dt} = -\frac{c^2}{2}$.

Следовательно, условия (2.7)-(2.8) справедливы

Проверим выполнение (2.5):

$$K_\tau^+(t, \tau) = \frac{c^2}{8} e^{-\frac{c^2}{2}(t+\tau)} (c^2(t - \tau) + 2),$$

$$K_t^+(t, \tau) = \frac{c^2}{8} e^{-\frac{c^2}{2}(t+\tau)} (c^2(t - \tau) - 2),$$

тогда

$$K_\tau^+(t, \tau) + K_t^+(t, \tau) = \frac{c^2}{8} e^{-\frac{c^2}{2}(t+\tau)} (c^2(t - \tau) + 2 + c^2(t - \tau) - 2) =$$

$$= \frac{c^4}{4} (t - \tau) e^{-\frac{c^2}{2}(t+\tau)} = -c^2 K^+(t, \tau).$$

Получаем, что (2.13) является ядром оператора (2.2).

Аналогично находим $K^-(t, \tau) = e^{c^2 \tau} \cdot \Phi(\tau - t)$, $K^-(t, \tau) = -\frac{c^2}{4} (\tau - t) e^{\frac{c^2}{2}(t+\tau)}$.

Ч.т.д.

Список литературы

1. Shishkina E.L. Transmutations, singular and fractional differential equations with applications to mathematical physics / E.L. Shishkina, S.M. Sitnik // Elsevier, Amsterdam; 2020. 592 p.

2. Шишкина Э. Л., Алзамили Х., Кудоси А. М., Ситник С. М. Приложения операторов преобразования типа Векуа – Эрдейи – Лаундеса к дифференциальным уравнениям / Шишкина Э. Л., Алзамили Х., Кудоси А. М., Ситник С. М. // Прикладная математика & Физика. 2024. № 56 (1). С. 27–34.

References

1. Shishkina E.L. Transmutations, singular and fractional differential equations with applications to mathematical physics / E.L. Shishkina, S.M. Sitnik // Elsevier, Amsterdam; 2020. 592 p.

2. Shishkina E. L., Alzamili H., Qudosy A. M., Sitnik S. M. 2024. Applications of Transmutations of Vekua – Erd’elyi – Lowndes Type to Differential Equations. Applied Mathematics & Physics, № 56(1). С. 27–34.

DOI: 10.58168/OpEq2025_71-86

УДК 004.932

**ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАДОНА
К ШУМУ ПРИ ОБНАРУЖЕНИИ ПРЯМЫХ ЛИНИЙ
НА ИЗОБРАЖЕНИЯХ**

INVESTIGATION OF THE STABILITY OF RADON-TO-NOISE CONVERSION
DURING LINE DETECTION IN IMAGES

Кожемякин Никита Сергеевич

студент 4 курса факультета прикладной математики, информатики и механики

ВГУ, г. Воронеж, Россия

Kozhemiakin Nikita Sergeevich

4th year student of the Faculty of Applied Mathematics, Computer Science and
Mechanics of VSU, Voronezh, Russia

Аннотация. В данной статье рассматриваются модификации преобразования Радона, направленные на обнаружение прямых линий на зашумленных изображениях. Проведён сравнительный анализ трёх подходов: классического преобразования, пороговой и локальной модификаций. Пороговая модификация реализует предварительное подавление слабых интенсивностей, в то время как локальная ограничивает область интегрирования по длине отрезка. Для каждого метода проведены эксперименты с использованием синтетических изображений при различных уровнях шума. На основе анализа пиков и восстановленных линий показано, что каждая модификация обладает своими преимуществами и применима в разных условиях. Работа подчёркивает актуальность задачи и необходимость дальнейшего исследования преобразования Радона в области поиска линий на изображении.

Abstract. This paper considers modifications of the Radon transform aimed at detecting straight lines in noisy images. A comparative analysis of three approaches is presented: the classical Radon transform, the thresholded modification, and the localized integration. The thresholded approach suppresses low-intensity values prior to transformation, while the localized method limits the integration region to a finite-length segment. Each method was tested on synthetic images with varying levels of noise. Based on the analysis of peaks in the sinogram and the reconstructed lines, it is shown that each modification has its own advantages and is applicable under different conditions. The study highlights the relevance of the problem and the need for further research on the Radon transform in the context of line detection in images.

Ключевые слова: преобразование Радона, обнаружение прямых, устойчивость к шуму, пороговая фильтрация, локальная интеграция, восстановление линий.

Keywords: Radon transform, line detection, noise robustness, local maxima, thresholding, localized integration, line reconstruction.

1. Введение

Обнаружение прямых линий на изображениях является важной задачей, с которой мы сталкиваемся в разных областях, от медицинских технологий до робототехники. Одним из наиболее известных методов выделения прямых линий является преобразование Радона. С его помощью изображение преобразуется в параметрическое пространство, где линии отображаются как локальные максимумы. Это делает процесс обнаружения более удобным для автоматической обработки. Однако классическое преобразование Радона обладает серьезным недостатком - чувствительностью к шуму, который неизбежно присутствует в реальных изображениях.

2. Классическое преобразование Радона

Преобразование Радона функции двух переменных $f(x, y)$ определяется как интеграл этой функции вдоль прямой, заданной в параметрическом виде, и выражается следующей формулой:

$$R(s, \alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s \cos \alpha - z \sin \alpha, s \sin \alpha + z \cos \alpha) \quad (1)$$

где s - расстояние от начала координат до прямой, α - угол между прямой и осью x , z - переменная, задающая положение вдоль прямой.

Данное представление удобно для геометрической интерпретации, однако в вычислительных приложениях, таких как обработка изображений, чаще используется эквивалентная формула с применением дельта-функции Дирака:

$$R(s, \alpha) = \iint_{R^2} f(x, y) \delta(s - x \cos \alpha - y \sin \alpha) dx dy \quad (2)$$

где $\delta(\cdot)$ - дельта-функция, которая выделяет множество точек (x, y) , лежащих на прямой с параметрами (s, α) . Такое представление особенно удобно при дискретизации и построении алгоритмов выделения прямых на цифровом изображении.

В задачах нахождения прямых линий преобразование Радона применяется следующим образом. Изображение $I(x, y)$ трактуется как дискретная двумерная функция, и для каждого направления α и набора расстояний s вычисляется сумма значений пикселей, лежащих на соответствующих прямых. Полученное двумерное распределение $R(\alpha, s)$, называемое синограммой или результатом преобразования, содержит локальные максимумы в тех точках параметрического пространства, где проекция изображения имеет выраженную линейную структуру. Таким образом, задача выделения прямых на изображении сводится к поиску пиков на синограмме.

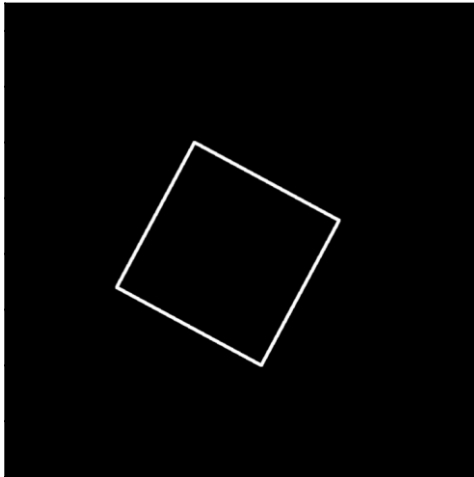
2.1 Преобразование Радона при обнаружении линий

В данном экспериментальном исследовании использовалась дискретная реализация классического преобразования Радона, представленная в функции `radon` из библиотеки `scikit-image` (Python).

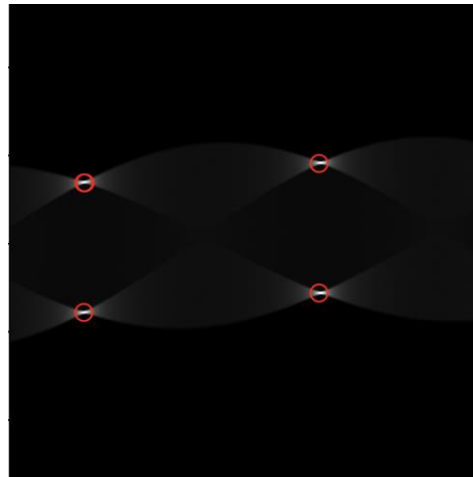
Тестовые изображения представляли собой ромбовидную структуру, нарисованную на чёрном фоне.

Для моделирования реальных искажений к изображениям добавлялся гауссовский шум с нулевым средним и двумя уровнями дисперсии:

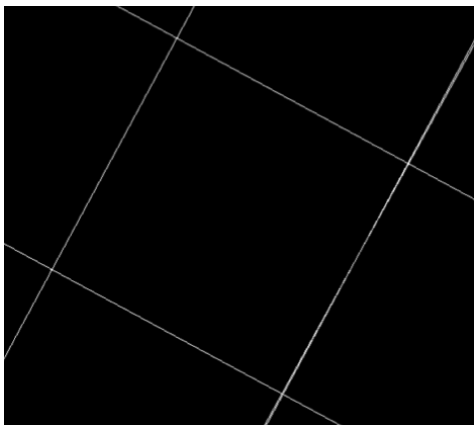
- слабый шум: $\sigma = 0.05$,
- сильный шум: $\sigma = 0.2$.



(a) Исходное изображение



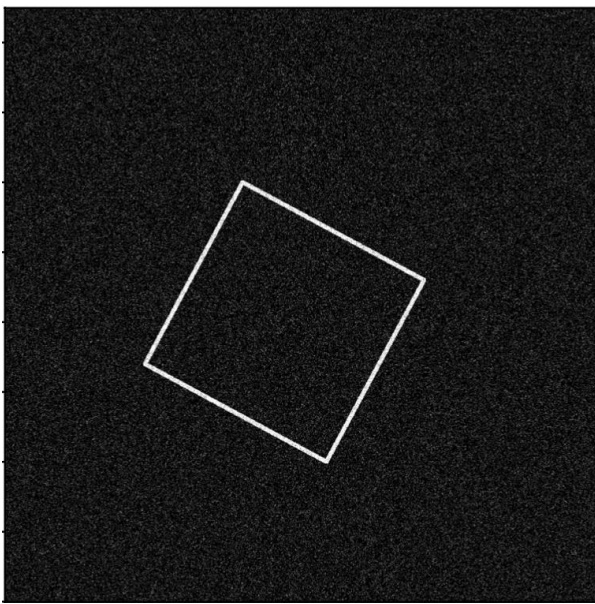
(b) Преобразование Радона



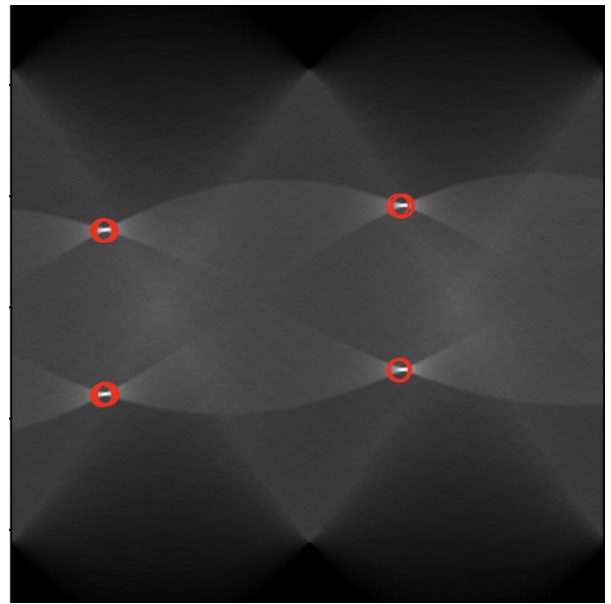
(c) Восстановленные линии

Рис. 1.1: результат работы преобразования Радона с последующим восстановлением линий

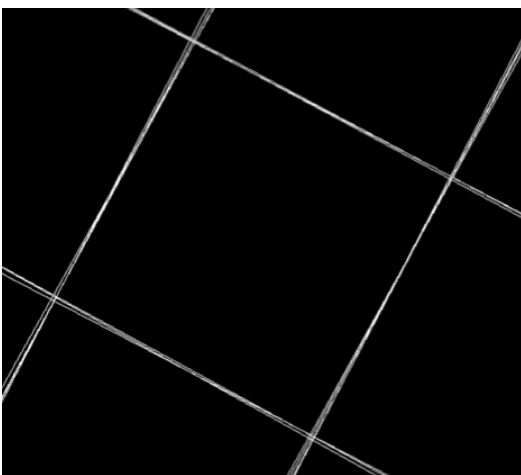
Получены результаты применения классического преобразования Радона к изображению ромба без добавления шума (рис.1.1). На исходном изображении (рис. 1.1a) отчётливо видны границы фигуры. Результаты преобразования (рис. 1.1b) демонстрируют четыре выраженных пика, соответствующих ориентациям сторон ромба. На восстановленном изображении (рис. 1.1c) видно, что линии точно соответствуют исходной структуре. Это подтверждает корректную работу алгоритма в идеальных условиях.



(a) Исходное изображение



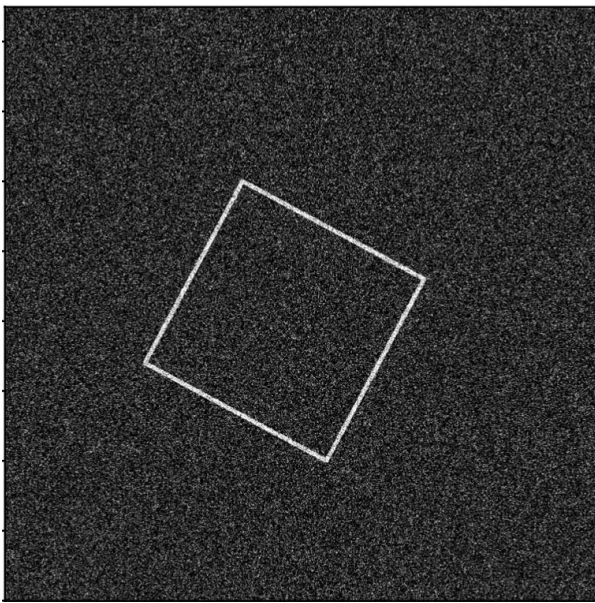
(b) Преобразование Радона



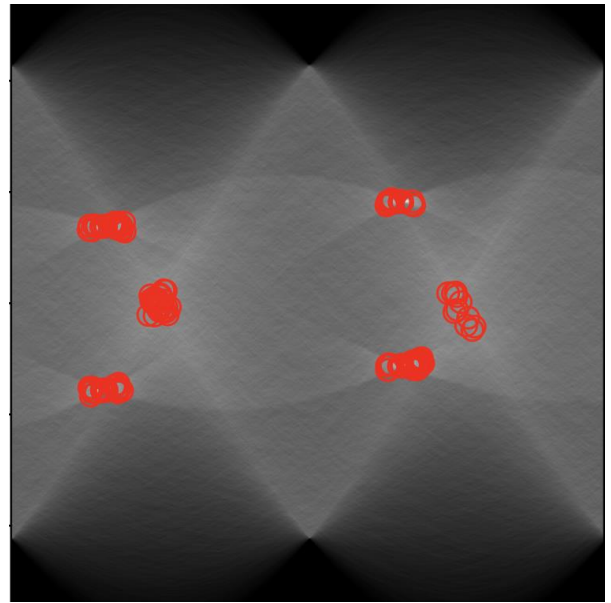
(c) Восстановленные линии

Рис. 2.1: результат работы преобразования Радона при шуме с коэффициентом $\sigma = 0.05$ с последующим восстановлением линий

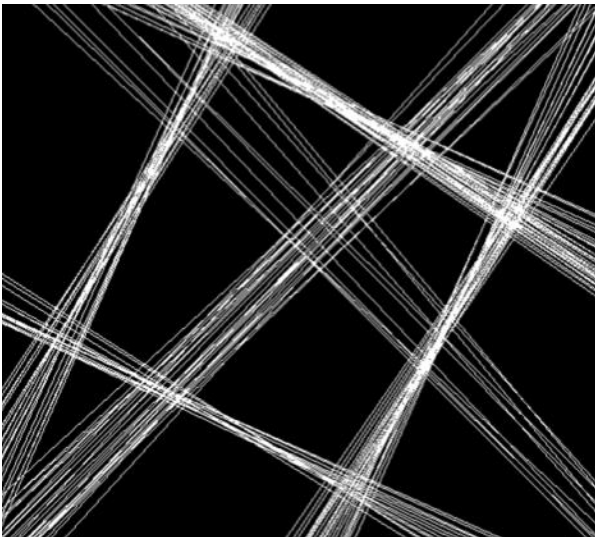
При слабом шуме с дисперсией $\sigma = 0.05$, результаты приведены на рисунке 2.1. На исходном изображении (рис. 2.1a) заметны искажения структуры, однако форма ромба всё ещё различима. Результаты преобразования (рис. 2.1b) сохраняют основные пиковые области, хотя наблюдается некоторое расширение и размытость пиков, вызванная шумом. Несмотря на это, восстановленное изображение (рис. 2.1c) всё ещё позволяет корректно выделить основные прямые, хотя уже появляются дополнительные ложные срабатывания.



(a) Исходное изображение



(b) Преобразование Радона



(c) Восстановленные линии

Рис. 2.2: результат работы преобразования Радона при шуме с коэффициентом $\sigma = 0.2$ с последующим восстановлением линий

Существенное ухудшение результатов наблюдается при сильном шуме с дисперсией $\sigma = 0.2$ (рис. 2.2). Изображение (рис. 2.2a) почти полностью теряет различимость исходной структуры. На результатах преобразования (рис. 2.2b) появляются многочисленные пиковые области, вызванные шумом. Это приводит к росту количества восстановленных линий (рис. 2.2c): на изображении появляются как истинные, так и ложные прямые, что делает результат трудно интерпретируемым.

Классическое преобразование Радона эффективно в условиях отсутствия или слабого шума. Однако при увеличении интенсивности шума происходит резкое снижение точности. Это указывает на необходимость применения модификаций классического метода, которые могут повысить устойчивость к шуму, таких как пороговая и локальная модификации, рассмотренные далее.

3. Пороговое преобразование Радона

Для повышения устойчивости преобразования Радона к шуму можно применить простую, но эффективную модификацию - **пороговое преобразование Радона**. Идея заключается в том, чтобы при вычислении учитывать только те точки изображения, значения которых превышают определённый порог, соответствующий значимым структурам. Таким образом, вклад слабых (возможно шумовых) пикселей в интеграл подавляется, а вклад сильных контурных элементов усиливается.

Определим пороговую функцию $f_T(x, y)$ по следующему правилу:

$$f_T(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{при } f(x, y) \geq T \\ 0, & \text{в других случаях} \end{cases}$$

где $T > 0$ - выбранное пороговое значение. Тогда пороговое преобразование Радона имеет следующий вид (3):

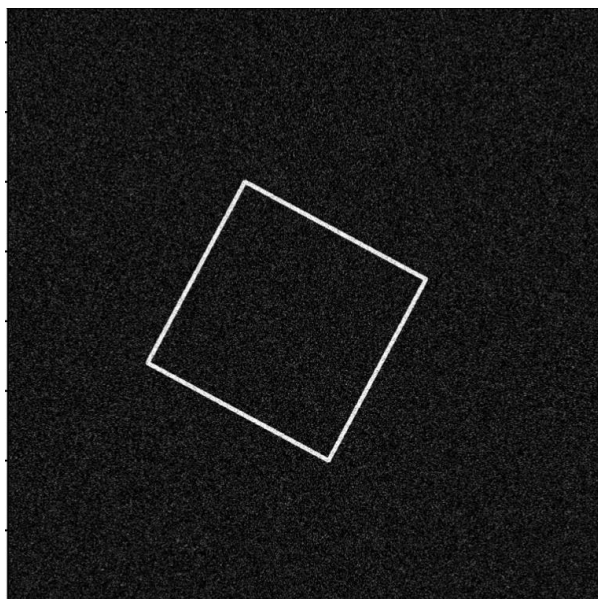
$$R_T(s, \alpha) = \iint_{R^2} f_T(x, y) \delta(s - x \cos \alpha - y \sin \alpha) dx dy \quad (3)$$

Таким образом, интегрирование вдоль прямой осуществляется только по тем точкам, где интенсивность изображения превышает порог T , а остальные значения обнуляются. Выбор значения порога T может быть как фиксированным, так и динамичным, например, по критерию Отсу или по медианному значению. В данной работе использовался порог по критерию Отсу.

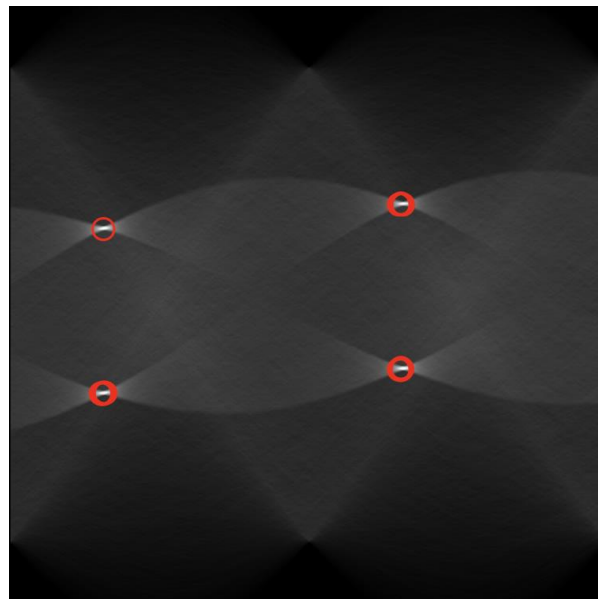
3.1 Пороговое преобразование Радона при обнаружении линий

В рамках экспериментального исследования устойчивости преобразования Радона к шуму была реализована пороговая модификация. В качестве основы использовалась дискретная реализация классического преобразования Радона, представленная в функции `radon` из библиотеки `scikit-image` (Python). Все остальное окружение и тестовые данные не изменялись, они аналогичны данным в экспериментальной части, связанной с классическим преобразованием Радона.

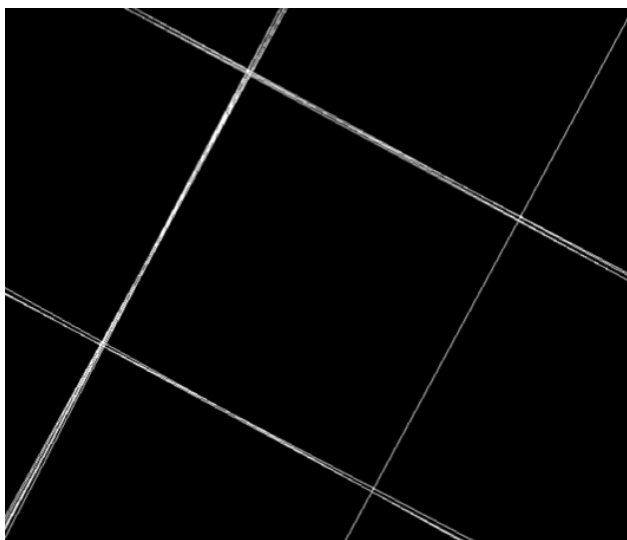
Пороговая фильтрация осуществлялась до применения преобразования Радона: все значения пикселей изображения, не превышающие заданный порог, обнулялись. Величина порога T определялась автоматически по критерию Отсу с помощью функции `threshold_otsu` из `scikit-image`. Так сохранялись наиболее интенсивные участки изображения.



(a) Исходное изображение

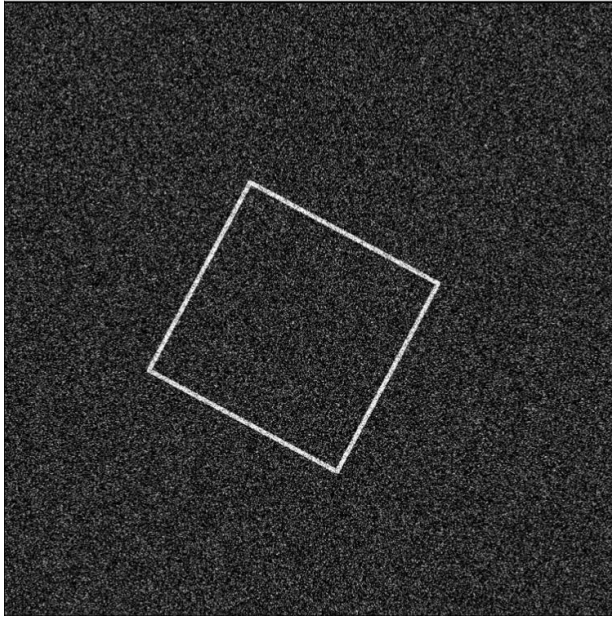


(b) Преобразование Радона (пороговое)

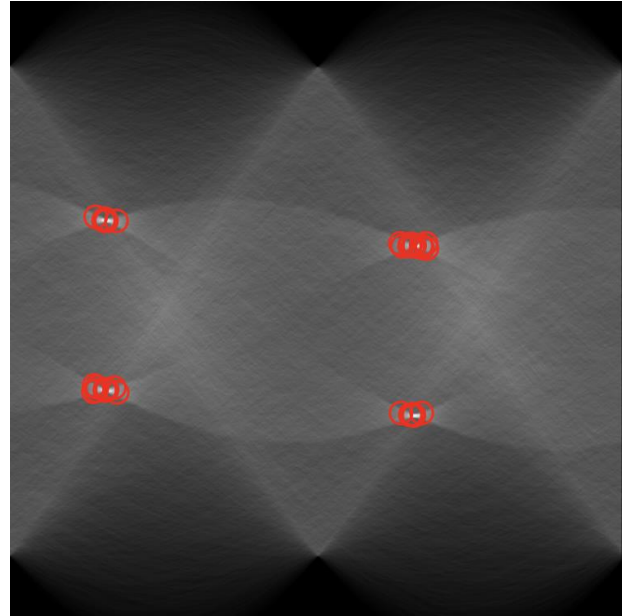


(c) Восстановленные линии

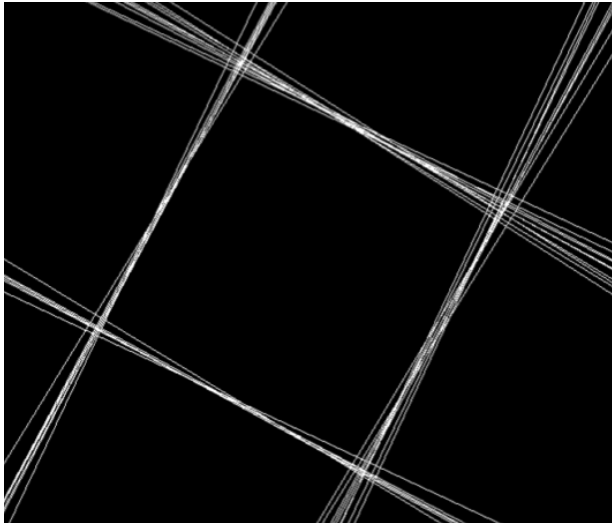
Рис. 3.1: результат работы порогового преобразования Радона при шуме с коэффициентом $\sigma = 0.05$ с последующим восстановлением линий



(a) Исходное изображение



(b) Преобразование Радона (пороговое)



(c) Восстановленные линии

Рис. 3.2: результат работы порогового преобразования Радона при шуме с коэффициентом $\sigma = 0.2$

Получены результаты применения порогового преобразования Радона к изображению ромба при слабом шуме $\sigma = 0.05$ (рис.3.1). Результаты преобразования (рис. 3.1b) чётко выделяют четыре основных пика, соответствующих сторонам фигуры. Восстановленные линии (рис. 3.1c)

подтверждают, что после фильтрации удалось корректно определить геометрию ромба.

Далее представлены результаты при сильном шуме $\sigma = 0.02$. Несмотря на значительное искажение изображения и повышение фона, метод всё ещё способен извлекать основные направления ромба. Результаты преобразования содержат ряд дополнительных слабых пиков (рис. 3.2b). Восстановление линий (рис. 3.2c) демонстрирует умеренное количество ложных срабатываний. Основные линии ромба видно, но можно заметить достаточное количество ложных линий. Это говорит о неэффективности данного преобразования на сильно зашумленных изображениях, но при этом полученные результаты лучше, чем в классическом преобразовании Радона (рис. 2.1, рис. 2.2).

4. Локальное преобразование Радона

Пороговая модификация преобразования Радона направлена на фильтрацию по значению яркости, устраняя вклад слабых пиков, которые могут быть обусловлены шумом. Данный подход является глобальным, как и само классическое преобразование Радона (2) : интегрирование происходит по всей бесконечной прямой, проходящей через всё изображение. Даже при пороговой фильтрации шумы могут давать вклад в синограмму, особенно в условиях высокой интенсивности шума.

Следующим логичным шагом является ограничение области интегрирования - не по яркости, а по пространству, с целью повышения устойчивости к шуму. Перейдем к такому понятию, как **локальное преобразование Радона** - модификации, в которой классическое интегрирование вдоль всей прямой заменяется интегрированием по ограниченному отрезку заданной длины. Для этого нам необходимо внести некоторые изменения в форму записи преобразования Радона с дельта-функцией. Любая точка (s, α) может быть задана следующим образом:

$$x(t) = x_0 - t \sin \alpha; \quad y(t) = y_0 + t \cos \alpha, \quad t \in R$$

где $x_0 = s \cos \alpha + c_x$; $y_0 = s \sin \alpha + c_y$ и (c_x, c_y) - координаты центра изображения. Это позволяет получить следующий вид преобразования

$$R(s, \alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x(t), y(t)) dt \quad (4)$$

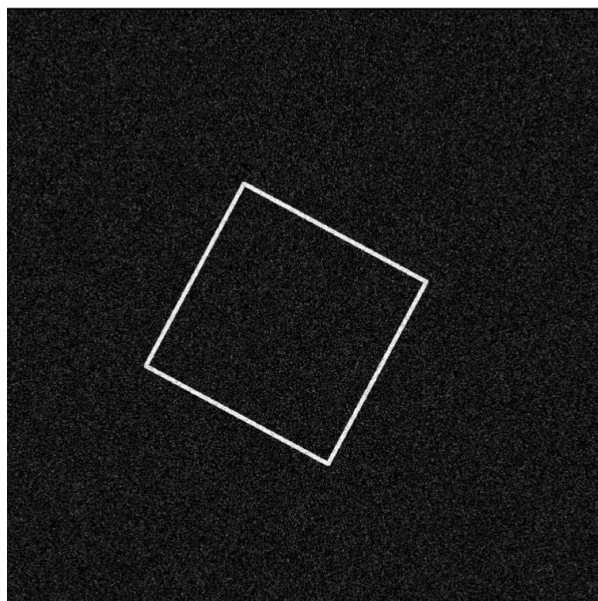
Далее нам необходимо локализовать преобразование Радона (4), чтобы повысить устойчивость метода к шуму. Именно поэтому вводится ограничение области интегрирования вдоль прямой, сохраняя только её центральную часть длины $2L$. Получаем следующее:

$$R_L(s, \alpha) = \int_{-L}^L f(x(t), y(t)) dt \quad (5)$$

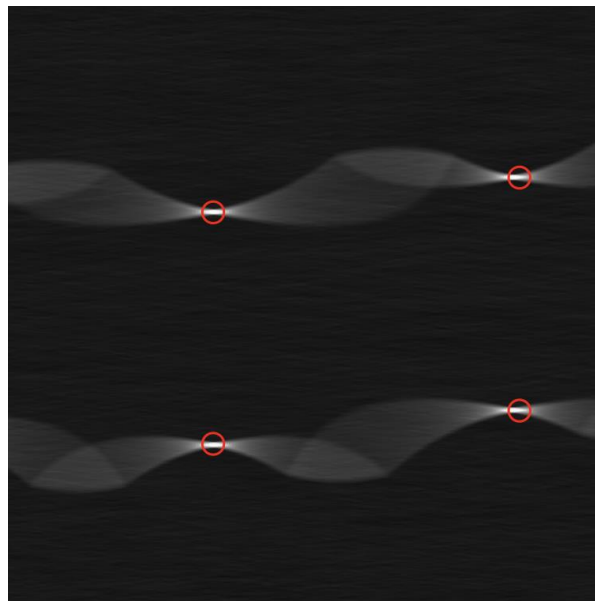
где $L > 0$ - половина длины всего отрезка интегрирования.

4.1 Локальное преобразование Радона при обнаружении линий

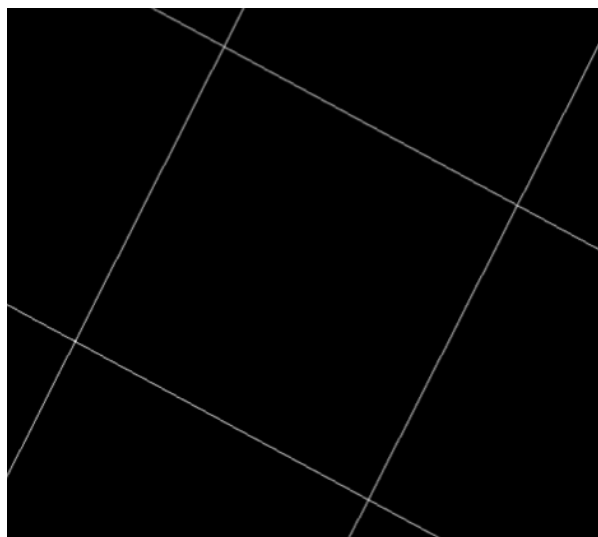
В экспериментальной части исследования была реализована локальная модификация преобразования Радона, направленная на снижение влияния шума путём ограничения длины отрезка интегрирования вдоль прямой. В отличие от классического подхода, предполагающего свёртку вдоль всей прямой, локальное преобразование Радона использует интегрирование только по определенному отрезку фиксированной длины $2L$, центрированному в каждой точке проекции. Все остальное окружение и тестовые данные не изменялись, они аналогичны данным в экспериментальной части, связанной с классическим преобразованием Радона.



(a) Исходное изображение

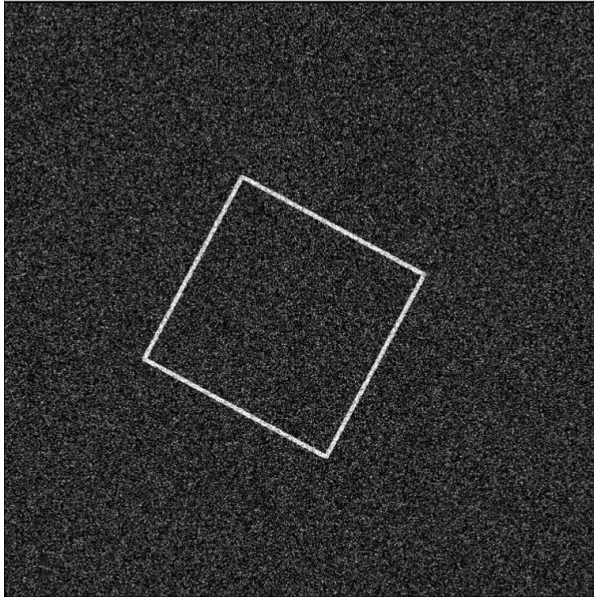


(b) Преобразование Радона (локальное)

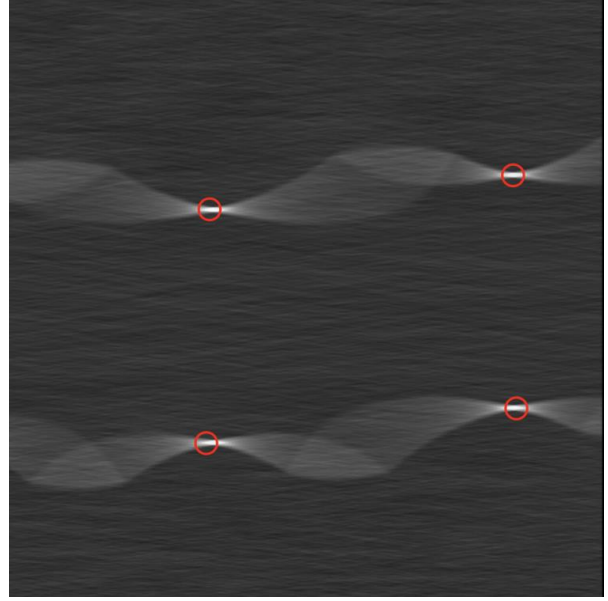


(c) Восстановленные линии

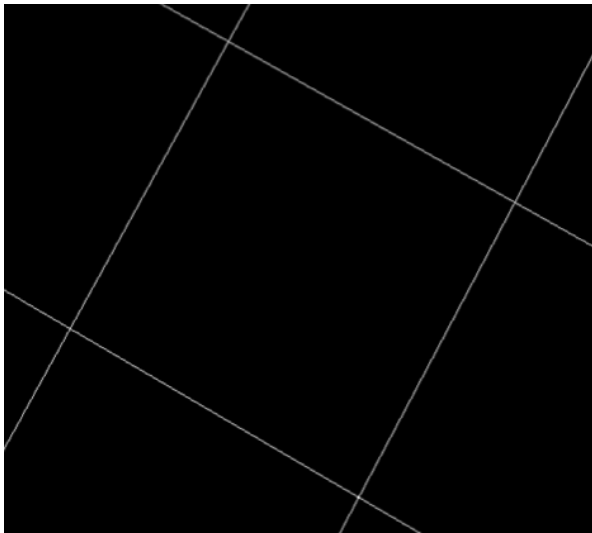
Рис. 3.1: результат работы локального преобразования Радона при шуме с коэффициентом $\sigma = 0.05$ с последующим восстановлением линий



(a) Исходное изображение



(b) Преобразование Радона (локальное)



(c) Восстановленные линии

Рис. 4.2: результат работы локального преобразования Радона при шуме с коэффициентом $\sigma = 0.2$ с последующим восстановлением линий

Получены результаты применения локального преобразования Радона к изображению ромба при слабом шуме $\sigma = 0.05$ (рис.3.1). Видно, что результаты преобразования (рис. 4.1b) имеют выраженные пики, соответствующие реальным структурам изображения. Восстановленные линии (рис. 4.1c) точно

совпадают с геометрией исходного изображения, при этом полностью отсутствуют ложные линии.

Далее представлены результаты при сильном шуме $\sigma = 0.02$ (рис. 4.2). Несмотря на значительное зашумление, локальное преобразование сохраняет устойчивость: отсутствуют ложные пики (рис. 4.2b), все четыре ожидаемые линии выделены корректно, количество ложных линий сведено к минимуму (рис. 4.2c)

Хотя и локальное преобразование показало себя хорошо на тестовых данных, с учетом его ограничений, оно может быть неэффективно, если линии занимают все пространство изображения.

5. Вывод

В данной работе была проведена серия экспериментов, направленных на исследование устойчивости различных вариантов преобразования Радона к шуму при обнаружении прямых линий на изображениях. Рассмотрены три подхода: классическое преобразование Радона, его пороговая модификация и локальная модификация с ограничением области интегрирования.

Полученные результаты показали, что при отсутствии или слабом уровне шума классическое преобразование Радона обеспечивает точное восстановление линейных структур. Однако при повышении зашумленности точность резко снижается: результаты преобразования наполняются ложными пиками, а количество ошибочных линий увеличивается. Пороговая модификация, реализующая предварительное исключение слабых интенсивностей, показала улучшение результатов, особенно при умеренной зашумленности. Тем не менее, при сильном шуме и она теряет эффективность. Наиболее устойчивым методом оказалось локальное преобразование Радона.

При этом важно отметить, что ни одна из модификаций не является универсально наилучшей. Каждая из них может быть эффективна в определенной ситуации: пороговая - при выделении четких, ярко выраженных

структур, локальная - при нахождении коротких или частично разрушенных контуров в зашумленных данных, классическая - при высоком качестве исходного изображения.

Список литературы

1. Преобразование Радона на плоскости : учебно-методическое пособие для вузов : [для студ. 4 к. очной формы обучения направления 010400.62 - Приклад.математика и информатика] / Воронеж. гос. ун-т ; [сост.: Л.Н. Ляхов и др.]. - Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2011, С. 11-23, 68-73.

2. Тофт, П. Преобразование Радона - теория и реализация. Технический университет Дании, 1996.

3. Оцу, Н. Метод выбора порога из гистограммы уровней яркости // IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Т. 9, № 1, 1979. С. 62-66.

4. Гонсалес Р. С., Вудс Р. Е. Цифровая обработка изображений. - 3-е изд., пер. с англ. - М.: Техносфера, 2012.

References

1. The Radon Transform on the Plane: Educational manual for universities [for 4th-year full-time students of the program 010400.62 - Applied Mathematics and Informatics] / Voronezh State University; compiled by L.N. Lyakhov et al. - Voronezh: IPC VSU, 2011. - pp. 11-23, 68-73.

2. Toft, P. A. The Radon Transform - Theory and Implementation. Technical University of Denmark, 1996, p.

3. Otsu, N. A threshold selection method from gray-level histograms // IEEE Trans. Systems, Man, and Cybernetics, Vol. 9, no. 1, 1979, P. 62-66.

4. Gonzalez R. C., Woods R. E. Digital Image Processing. - 3rd ed. - Upper Saddle River: Pearson Education, 2008.

DOI: 10.58168/OpEq2025_87-92

УДК 517.926

**ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД АНАЛИЗА СУЩЕСТВОВАНИЯ
ПЕРИОДИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО
УРАВНЕНИЯ**

GEOMETRIC METHOD FOR ANALYZING THE EXISTENCE OF A PERIODIC
SOLUTION TO A DIFFERENTIAL EQUATION

Коротких Анастасия Сергеевна

преподаватель кафедры математики ВГЛТУ, г. Воронеж, Россия

Korotkih Anastasya Sergeevna

Lecturer of the Department of Mathematics at Voronezh State University of Forestry
and Technologies named after G.F. Morozov, Voronezh, Russia

Аннотация. В статье рассматриваются особенности геометрического исследования существования решений периодической задачи для дифференциальных уравнений.

Abstract. The article discusses the features of a geometric study of the existence of solutions to a periodic problem for differential equations.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, периодическое решение, оператор сдвига.

Keywords: differential equation, periodic solution, shift operator.

Пусть в m -мерном векторном пространстве E^m задана точка x с координатами:

$$x = (\omega_1, \dots, \omega_m)$$

ДУ, соответствующей уравнению (1), совпадающий с решением данного уравнения.

Рассмотрим оператор сдвига в промежутке времени от 0 до T :

$$Ux = U(T, 0)x \quad (4)$$

Очевидно, что если $x(0)$ является неподвижной точкой оператора (4), то решение $x(t)$ уравнения (1) будет T -периодическим. Верно и обратное утверждение.

Таким образом, задача о доказательстве существования периодического решения системы ДУ, записанной в виде (1), сводится к доказательству существования неподвижных точек оператора сдвига (4). Для этого можно использовать такой метод, как теория векторных полей.

Рассмотри поле

$$Qx = x - U(T)x. \quad (5)$$

Для того, чтобы у оператора (4) существовали неподвижные точки, необходимо, чтобы существовала ограниченная область Ω с границей L , такая, что поле (5) имеет на этой границе топологическую степень, не равную нулю. В качестве такой области удобно выбрать шар такого радиуса R , чтобы все потенциальные T -периодические решения уравнения (1) входили в этот шар $\|x\| \leq R$. Для этого перед выбором области Ω проводится априорная оценка T -периодических решений. Главным аспектом является установление того факта, что топологическая степень векторного поля (5) не будет равна нулю. Так как оператор сдвига задается в неявном виде, применяются методы, разработанные М.А. Красносельским и А.И. Перовым. Многие принципы основываются на понятии точки T -невозвращаемости траекторий, однако в большинстве случаев затруднен поиск таких точек, поэтому наиболее удобным способом исследования является метод направляющих функций, сформулированный в [2]. С помощью данного метода можно вычислить топологическую степень векторного поля (5) [1].

Рассмотрим применения этого метода на примере системы, удовлетворяющей виду (1):

$$\begin{cases} \frac{d\varepsilon_1}{dt} = a\varepsilon_1^3 + 3b\varepsilon_1^2\varepsilon_2 + c\varepsilon_1\varepsilon_2^2 + d\varepsilon_2^3 + \varphi_1(t, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \\ \frac{d\varepsilon_2}{dt} = b\varepsilon_1^3 + c\varepsilon_1^2\varepsilon_2 + 3d\varepsilon_1\varepsilon_2^2 + e\varepsilon_2^3 + \varphi_2(t, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \end{cases}$$

Необходимо указать правильную направляющую функцию данной системы и если ее индекс окажется отличным от нуля, то по сформулированному выше принципу, система будет иметь хотя бы одно T -периодическое решение. Для указания такой направляющей функции, которая бы удовлетворяла леммам и теоремам [2], необходимо ввести следующие ограничительные условия на систему уравнений: функции $\varphi_1(t, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ и $\varphi_2(t, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ должны T -периодичны по t и

$$\lim_{|\varepsilon_1|+|\varepsilon_2|\rightarrow\infty} \frac{\varphi_1(t, \varepsilon_1, \varepsilon_2)}{|\varepsilon_1|^3 + |\varepsilon_2|^3} = \lim_{|\varepsilon_1|+|\varepsilon_2|\rightarrow\infty} \frac{\varphi_2(t, \varepsilon_1, \varepsilon_2)}{|\varepsilon_1|^3 + |\varepsilon_2|^3} \quad (6)$$

Направляющая функция должна быть невырожденной, для этого уравнения

$$\begin{aligned} ak^3 + 3bk^2 + ck + d &= 0 \\ bk^3 + ck^2 + 3dk + e &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

не должны иметь общих вещественных корней и

$$|a| + |b| > 0 \quad (8)$$

При выполнении перечисленных условий, заданная система становится системой с главной потенциальной частью и принимает вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \varepsilon_1} = a\varepsilon_1^3 + 3b\varepsilon_1^2\varepsilon_2 + c\varepsilon_1\varepsilon_2^2 + d\varepsilon_2^3 \\ \frac{\partial \Phi_0}{\partial \varepsilon_2} = b\varepsilon_1^3 + c\varepsilon_1^2\varepsilon_2 + 3d\varepsilon_1\varepsilon_2^2 + e\varepsilon_2^3 \end{cases}$$

В таком случае легко указать направляющую функцию [4],

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{4}a\varepsilon_1^4 + b\varepsilon_1^3\varepsilon_2 + \frac{1}{2}c\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2 + d\varepsilon_1\varepsilon_2^3 + \frac{1}{4}e\varepsilon_2^4$$

Очевидно, что функция является четной, следовательно ее индекс нечетен, а как следствие, не равен нулю, что гарантирует наличие T -периодического решения системы.

Список литературы

1. Звягин, В.Г. Метод направляющих функций и его модификации / В.Г. Звягин, С.В. Корнев. – Москва: ЛЕНАНД, 2018. – 163 с.
2. Красносельский, М.А. Оператор сдвига по траекториям системы дифференциальных уравнений / М.А. Красносельский. – Москва: Наука, 1966. – 331 с.
3. Красносельский, М.А. Геометрические методы нелинейного анализа / М.А. Красносельский, П.П. Забрейко. – Москва: Наука, 1975. – 512 с.
4. Кузнецова, А.С. О периодических решениях систем с главной потенциальной частью / А.С. Кузнецова // Некоторые вопросы анализа, алгебры, геометрии и математического образования: материалы IV-й международной молодежной научной школы "Актуальные направления математического

анализа и смежные вопросы», посвященной 90-летию со дня рождения профессора Ю.Г. Борисовича / Воронежский государственный педагогический университет. – Воронеж, 2020. – С. 101-102.

5. Перов, А.И. Метод направляющих функций / А.И. Перов, В.К. Евченко. – Воронеж: Издательско-полиграфический центр ВГУ, 2012. – 182 с.

6. Векторные поля на плоскости / М.А. Красносельский, А.И. Перов, А.И. Поволоцкий, П.П. Забрейко. – Москва: Физматгиз, 1963. – 248 с.

References

1. Zvyagin, V.G. The method of guiding functions and its modifications / V.G. Zvyagin, S.V. Kornev. – Moscow: LENAND, 2018. – 163 p.

2. Krasnoselsky, M.A. The shift operator along the trajectories of a system of differential equations / M.A. Krasnoselsky. Moscow: Nauka Publ., 1966. 331 p.

3. Krasnoselsky, M.A. Geometric methods of nonlinear analysis / M.A. Krasnoselsky, P.P. Zabreiko. Moscow: Nauka Publ., 1975. 512 p.

4. Kuznetsova, A.S. On periodic solutions of systems with the main potential part / A.S. Kuznetsova // Some issues of analysis, algebra, geometry and mathematical education: materials of the ivth International Youth Scientific School "Current directions of mathematical analysis and related issues", dedicated to the 90th anniversary of the birth of Professor Yu.G. Borisovich / Voronezh State Pedagogical University. Voronezh, 2020. pp. 101-102.

5. Perov, A.I. Method of guiding functions / A.I. Perov, V.K. Evchenko. Voronezh: VSU Publishing and Printing Center, 2012.

6. Vector Fields on a Plane / M.A. Krasnoselsky, A.I. Perov, A.I. Povolotsky, and P.P. Zabreyko. – Moscow: Fizmatgiz, 1963. – 248 p.

DOI: 10.58168/OpEq2025_93-102

УДК 517.7

**ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ УСТУПОК
ПРИ РЕШЕНИИ ВОЕННО-ПРИКЛАДНОЙ ЗАДАЧИ
МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ОБ ОПТИМАЛЬНОМ
ПЛАНИРОВАНИИ ЛИКВИДАЦИИ ТЕХНОГЕННОЙ АВАРИИ**

**THE APPLICATION OF THE METHOD OF SEQUENTIAL
CONCESSIONS IN SOLVING THE MILITARY-APPLIED TASK OF MULTI-
CRITERIA OPTIMIZATION ON OPTIMAL PLANNING FOR THE
ELIMINATION OF A MAN-MADE ACCIDENT**

Корыпаева Юлия Владимировна

кандидат физико-математических наук, доцент 206 кафедры математики
ВУНЦ ВВС «ВВА», г. Воронеж, Россия

Таболин Данила Анатольевич

курсант ВУНЦ ВВС «ВВА», г. Воронеж, Россия

Korupaeva Julia Vladimirovna

Candidate of Physical and mathematical Sciences, associate professor of the
department of mathematics of the Military Educational Research Centre of Air Force
«Air Force Academy named after professor N. E. Zhukovsky and Y. A. Gagarin»
(Voronezh)

Tabolin Danila Anatolyevich

cadet of the Military Educational Research Centre of Air Force «Air Force Academy
named after professor N. E. Zhukovsky and Y. A. Gagarin» (Voronezh)

Аннотация. В работе авторами обсуждаются вопросы многокритериальной
оптимизации в военно-прикладных задачах, а именно метод последовательных
уступок в задаче планирования ликвидации последствий техногенной

катастрофы. На основании данных о наличии комплектов для пожаротушения и ликвидации радиационного заражения, вероятностей выхода их из строя, имеющегося личного состава, сформулирована математическая модель. Модель содержит две целевых функции, одна из которых является приоритетной, и систему ограничений. С помощью графического метода решения задач линейного программирования и возможностей MS Excel 2010, авторами успешно применен метод последовательных уступок для решения многокритериальных задач, подготовлен отчет для рассмотрения лицом, принимающим решение. Отчет содержит решение задачи для разных значений уступок по первому критерию и соответствующие значения самих критериев.

Abstract. The authors discuss the issues of multi-criteria optimization in military-applied tasks, namely the method of successive concessions in the task of planning the elimination of the consequences of a man-made disaster. Based on the data on the availability of fire extinguishing and radiation contamination kits, the probabilities of their failure, and the available personnel, a mathematical model is formulated. The model contains two objective functions, one of which is a priority, and a system of constraints. Using the graphical method of solving linear programming problems and the capabilities of MS Excel 2010, the authors successfully applied the sequential assignment method to solve multi-criteria problems, and prepared a report for consideration by the decision maker. The report contains a solution to the problem for different assignment values according to the first criterion and the corresponding values of the criteria themselves.

Ключевые слова: задачи линейного программирования, графический метод, задачи многокритериальной оптимизации, метод последовательных уступок.

Keywords: linear programming problems, graphical method, multi-criteria optimization problems, sequential assignment method.

В различных областях практической деятельности часто встречаются задачи, в которых оптимальность некоторой операции приходится оценивать не по одному, а сразу по нескольким критериям f_1, f_2, \dots, f_n , причем одни из них требуется исследовать на максимум, а другие — на минимум. Такого рода задачи называют многокритериальными или векторными задачами оптимизации ([1], [2]).

Любой исследователь изначально понимает, что, вообще говоря, не существует решения, которое обеспечивало бы в экстремум первому критерию f_1 и одновременно доставляло бы максимум (или минимум) другому критерию f_2 , тем более тяжело и даже не реально получить такое решение для нескольких критериев. В связи с этим логично ввести понятие некоего компромиссного решения, при этом окончательный выбор решения по исследуемому вопросу предполагается волевым актом командира или лицом, принимающим решение (ЛПР). За ЛПР оставляют решение о том, какой ценой можно оплатить известное повышение эффективности или наоборот, какой долей эффективности можно пожертвовать, чтобы не нести слишком больших потерь. Все эти особенности формируют цель исследователя: предоставить в распоряжение ЛПР достаточное количество данных, позволяющих ему всесторонне оценить преимущества и недостатки каждого варианта решения и, опираясь на них, сделать окончательный выбор. В связи с этим, процедура разработки, исследования и решения многокритериальной задачи является диалоговой итеративной процедурой между ЛПР и машиной (исследователем).

Основная идея при решении задач векторной или многокритериальной оптимизации заключается в получении и обосновании методов определения компромиссных решений.

Существуют два основных подхода к решению задач векторной оптимизации. Первый подход основан на методах свертывания критериев, второй — на алгоритмах непосредственного отыскания компромиссных решений. В

настоящей работе рассмотрим применение одного из алгоритмов непосредственного отыскания компромиссных решений, а именно «метод последовательных уступок».

Постановка задачи. В некоторой воинской части имеется пожарная часть, которая имеет в наличии комплекты 2-х видов для пожаротушения и ликвидации радиационного заражения (РЗ). В таблице 1 находятся сведения о порядке формирования комплектов оборудования (КО) и личным составом (ЛС), наличие необходимого оборудования и личного состава.

Таблица 1 – Сведения о порядке формирования и наличии КО и ЛС

Номер комплекта	Оборудование 1	Оборудование 2	Оборудование 3	Оборудование 4	Личный состав
1	2	1	4	0	10
2	2	2	0	4	13
Наличие	12	8	20	12	65

Известно, что комплект вида 1 ликвидирует пожар на площади 2 га за 1 час, а комплект вида 2 ликвидирует последствия радиационного заражения на площади 3 га за 1 час. При этом в процессе пожаротушения и ликвидации РЗ может в течение часа выйти из строя комплект вида 1 с вероятностью 0,2, а комплект вида 2 с вероятностью 0,1. Требуется организовать процесс пожаротушения и ликвидации РЗ на территории 61 га таким образом, чтобы максимизировать площадь, на которой пожар потушен и минимизировать потери в оборудовании. Определить за какое время последствия катастрофы на указанной площади будут полностью устранены.

Решение. Обозначим за x_1 — количество комплектов первого вида, а x_2 — комплектов второго вида.

Составим первый критерий эффективности, выражающий площадь, на которой ликвидирован пожар и РЗ: $f_1(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$.

Составим второй критерий эффективности, выражающий математическое ожидание потерь оборудования при ликвидации аварии: $f_2(x_1, x_2) = 0,2x_1 + 0,1x_2$.

Будем считать, первый критерий более важный, тогда векторный критерий будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \max \\ \rightarrow \min \end{matrix}$$

на множестве

$$z_1 = \{(x_1, x_2) : 2x_1 + 2x_2 \leq 12, x_1 + 2x_2 \leq 8, 4x_1 \leq 20, 4x_2 \leq 12, 10x_1 + 13x_2 \leq 65, x_1 \geq 1, x_2 \geq 1\}.$$

Первый шаг. Максимизируем первый по важности критерий $f_1(x_1, x_2)$

$$\max_{z_1} f_1(x_1, x_2) = \max_{z_1} (2x_1 + 3x_2).$$

Имеем задачу линейного программирования, где $f_1(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$ — целевая функция, а

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leq 12, \\ x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ 4x_1 \leq 20, \\ 4x_2 \leq 12, \\ 10x_1 + 13x_2 \leq 65, \\ x_1 \geq 1, \\ x_2 \geq 1. \end{cases}$$

— система ограничений.

Так как целевая функция является функцией двух переменных, то эту задачу можно решить графическим методом. Для этого от системы неравенств в системе ограничения перейдем к соответствующей системе равенств и построим эти прямые в прямоугольной системе координат на плоскости Ox_1x_2 (рисунок 1).

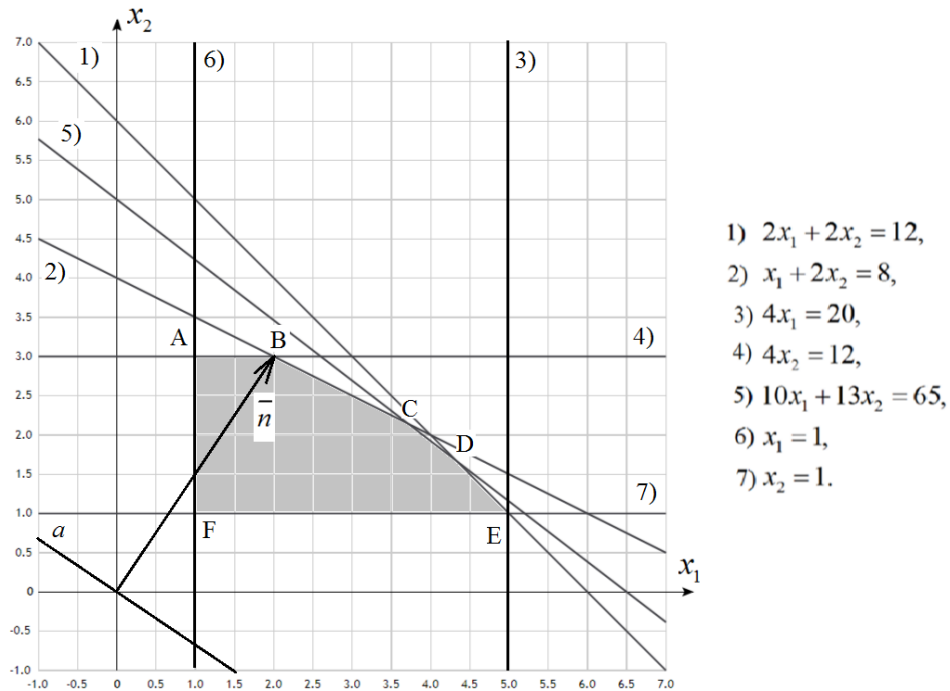


Рисунок 1 – ОДР при решении задачи максимизации первого критерия

Получим многоугольник ABCDEF, точки которого образуют область допустимых решений (ОДР). Вектор $\bar{n} = \{2; 3\}$ указывает направление возрастания функции, a – линия уровня, C – точка выхода, в ней функция $f_1(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$ достигает максимума, ее координаты $C\left(\frac{26}{7}; \frac{15}{7}\right)$. Координаты находятся в процессе решения системы уравнений
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 8, \\ 10x_1 + 13x_2 = 65. \end{cases}$$

Полученное решение не является целочисленным, поэтому требуется найти целочисленное решение, близкое к найденному, которое принадлежит ОДР и доставляет наибольшее значение целевой функции $f_1(x_1, x_2)$. Заметим, что банальное округление компонент решения приводит к результату $(3; 2)$, при этом значение целевой функции $f_1(3, 2) = 12$. Но если продолжить исследование точек с целочисленными координатами, близкими к $(3; 2)$ из ОДР, то заметим, что решение $(2; 3)$ даст большее значение целевой функции $f_1(2, 3) = 13$.

Следовательно, на первом шаге оптимальное решение будет $x_1^{10} = 2$, $x_2^{10} = 3$, а значение функции при найденном оптимальном решении

$$\max_{z_1} f_1(x_1, x_2) = \max_{z_1} (2x_1 + 3x_2) = f_1(2, 3) = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 13.$$

Полученное решение подставляем в критерий $f_2(x_1, x_2)$ и векторные оценки примут вид $\begin{pmatrix} f_1(x_1^{10}, x_2^{10}) \\ f_2(x_1^{10}, x_2^{10}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 0,7 \end{pmatrix}$.

Полученный результат предъявляют ЛПР. Если ЛПР не устраивает первый результат (13 га), то ему необходимо пересмотреть постановку задачи. Если же ЛПР не устраивает второй результат (0,7), то ему предлагается сделать некоторую уступку по первому критерию.

Второй шаг. Сделаем некоторую уступку по первому критерию $\Delta f_1 = -3$.

Следовательно, $f_1(x_1^{10}, x_2^{10}) + \Delta f_1 = f_1(2, 3) - 3 = 10$.

Минимизируем критерий $f_2(x_1, x_2)$:

$$\min_{z_2} f_2(x_1, x_2) = \min_{z_2} (0,2x_1 + 0,1x_2),$$

где

$$z_2 = \{(x_1, x_2) : 2x_1 + 3x_2 \geq 10, 2x_1 + 2x_2 \leq 12, x_1 + 2x_2 \leq 8, 4x_1 \leq 20, 4x_2 \leq 12, 10x_1 + 13x_2 \leq 65, x_1 \geq 1, x_2 \geq 1\}.$$

Заметим, множество z_2 получается из множества z_1 добавлением еще одного условия. На рисунке 2 это множество обозначено ABCDEKL.

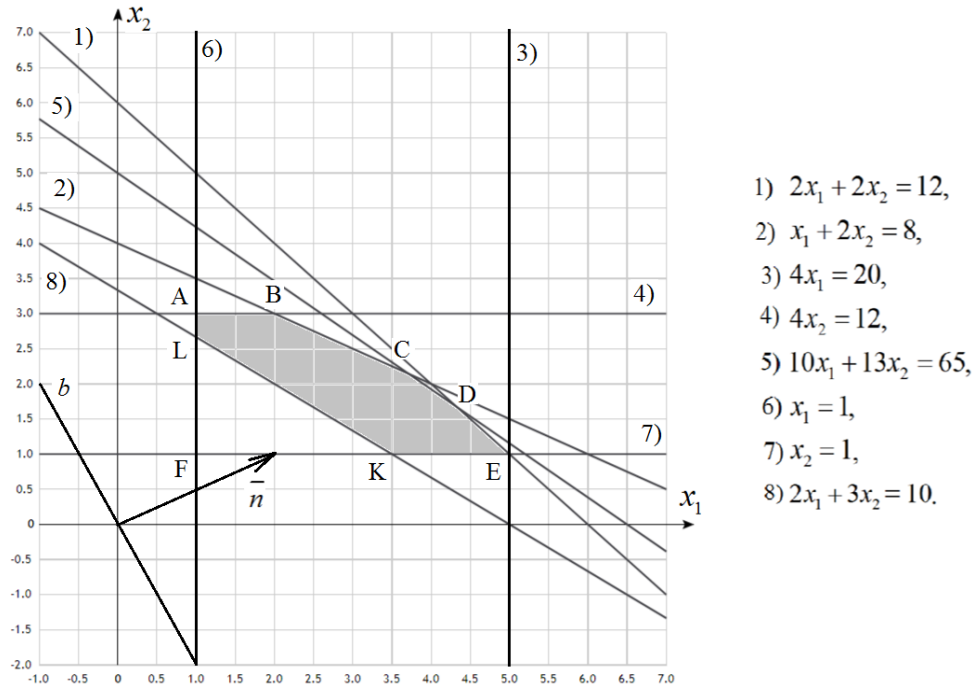


Рисунок 2 – ОДР при решении задачи максимизации второго критерия

Вектор $\bar{n} = \{0, 2; 0, 1\}$ (или коллинеарный ему $\bar{n} = \{2; 1\}$) указывает направление возрастания функции $f_2(x_1, x_2)$, b – линия уровня. Функция $f_2(x_1, x_2)$ достигает минимума в точке L (точка входа), $L\left(1; \frac{8}{3}\right)$. Координаты этой точки находятся в процессе решения системы уравнений
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 10, \\ x_1 = 1. \end{cases}$$

Анализ целочисленных решений в окрестности точки $\left(1; \frac{8}{3}\right)$ и принадлежащих ОДР приводит к оптимальному решению $x_1^{20} = 1$, $x_2^{20} = 3$.

Значение функции при найденном оптимальном решении

$$\min_{z_2} f_2(x_1, x_2) = \min_{z_2} (0, 2x_1 + 0, 1x_2) = f_2(1; 3) = 0, 2 \cdot 1 + 0, 1 \cdot 3 = 0, 5.$$

Векторные оценки имеют вид $\begin{pmatrix} f_1(x_1^{20}, x_2^{20}) \\ f_2(x_1^{20}, x_2^{20}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0,5 \end{pmatrix}$. Время, за которое последствия катастрофы на указанной площади 61 га будут полностью устранены, $t_{\text{тушение пожара}} = \frac{61}{1} = 61 \text{ час}$, $t_{\text{ликвидация РЗ}} = \frac{61}{9} \approx 6,78 \text{ час}$.

Анализируем полученный результат. Если ЛПР полученный результат устраивает, то задача решена. Если полученный результат ЛПР не устраивает, то диалог продолжается.

Специалист может рассмотреть ситуации, когда уступка на втором шаге будет иметь другие значения, и рассчитать (например, в MS Excel 2010) векторные оценки критериев. В нашем случае эти расчеты могут быть предоставлены в виде таблицы 2.

Исходя из результатов таблицы, видно, что при участии одного комплекта пожаротушения и трех комплектов для ликвидации РЗ достигается максимальное значение площади и минимальное значение математического ожидания потерь.

Таблица 2 – Расчет критериев при разных значениях уступки

Уступка по 1-му критерию	Значение x_1	Значение x_2	Значение 1-го критерия	Значение 2-го критерия
3	1	3	10	0,5
2	1	3	11	0,5
1	1	3	12	0,5
0	2	3	13	0,7

Таким образом, следует признать реализованный авторами подход удобным, обладающим гибкостью, и не встречающим трудностей в машинной реализации (например, с помощью MS Excel 2010 или вручную), специалисту

достаточно обладать основами знаний в области методов оптимизации и линейного программирования). Предлагаемый подход востребован с практической точки зрения, множество задач, для которых предлагаемая методика является подходящей, крайне велик.

Список литературы

1. Соболев И.М., Статников Р.Б. Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями. М.: Дрофа, 2006. – 175 с.
2. Коротченко А.Г., Кумагина Е.А., Сморякова В.М. Введение в многокритериальную оптимизацию. Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2017. – 55 с.

References

1. Sobol I.M., Statnikov R.B. The choice of optimal parameters in problems with many criteria. Moscow: Drofa, 2006. – 175 p.
2. Korotchenko A.G., Kumagina E.A., Smoryakova V.M. Introduction to multicriteria optimization. Educational and methodical manual. Nizhny Novgorod: Nizhny Novgorod State University, 2017. – 55 p.

DOI: 10.58168/OpEq2025_103-112

УДК 51-73

**РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЛАЗЕРНЫХ ПУЧКОВ РАЗЛИЧНОГО ВИДА
В СЛАБОТУРБУЛЕНТНОЙ АТМОСФЕРЕ**

**PROPAGATION OF VARIOUS TYPES OF LASER BEAMS
IN A LOW-TURBULENT ATMOSPHERE**

Лукинских Сергей Павлович

магистрант 2-го года обучения, ВГУ, Россия, г. Воронеж

Королев Никита Викторович

кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры оптики и
спектроскопии ВГУ, г. Воронеж, Россия

Lukinskikh Sergey Pavlovich

master's student, Voronezh State University, Voronezh, Russia

Korolev Nikita Victorovich

Cand. Sc. of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor of the Department of Optics and Spectroscopy,
Voronezh State University, Voronezh, Russia

Аннотация. В работе выполнено моделирование распространения лазерных лучей с различным поперечным распределением интенсивности в слаботурбулентной атмосфере. Турбулентная атмосфера моделировалась с помощью фазовых экранов, рассчитываемых на основе алгоритма быстрого преобразования Фурье с учетом модифицированного спектра фон Кармана. Численно показано преимущество гауссовых пучков для задач, требующих высокой стабильности распределения интенсивности и минимальных флуктуаций, а также эффективность «top-hat» пучков по сохранению пиковой яркости.

Abstract. In this work, we simulated the propagation of laser beams with various transverse intensity distributions in a low-turbulent atmosphere. The turbulent atmosphere was simulated using phase screens calculated based on the fast Fourier transform algorithm taking into account the modified von Karman spectrum. The advantage of Gaussian beams for problems requiring high stability of the intensity distribution and minimal fluctuations, as well as the effectiveness of «top-hat» beams in maintaining peak brightness, are shown numerically.

Ключевые слова: Фурье преобразование, лазерный луч, турбулентность.

Keywords: Fourier transform, laser beam, turbulence.

В настоящее время большое внимание уделяется исследованиям в области распространения лазерного излучения в атмосфере применительно к задачам оптической связи, адаптивной оптики, дистанционного зондирования, систем наведения, LIDAR и многих других. В каждом из этих приложений лазерному пучку необходимо проделать значительный путь через земную атмосферу, которая не является оптически однородной средой – имеются турбулентные неоднородности показателя преломления, что приводит к существенным искажениям параметров лазерного излучения.

Искажения проявляются в виде уширения пучка, блуждания центра интенсивности, флуктуации интенсивности. Совокупность данных эффектов ограничивает эффективность и условия применимости оптических систем. Понимание механизмов распространения лазерного излучения в турбулентной среде и количественная оценка вызываемых ими искажений являются ключевыми проблемами, в частности, при проектировании и разработке комплексов «источник излучения – приемник».

В данной работе проводится сравнительный анализ распространения различных профилей лазерных пучков: гауссова пучка (фундаментальная мода TEM_{00}), пучка с профилем «top-hat» (равномерной интенсивности) и пучка Бесселя (рис. 1), – в условиях слабой атмосферной турбулентности.

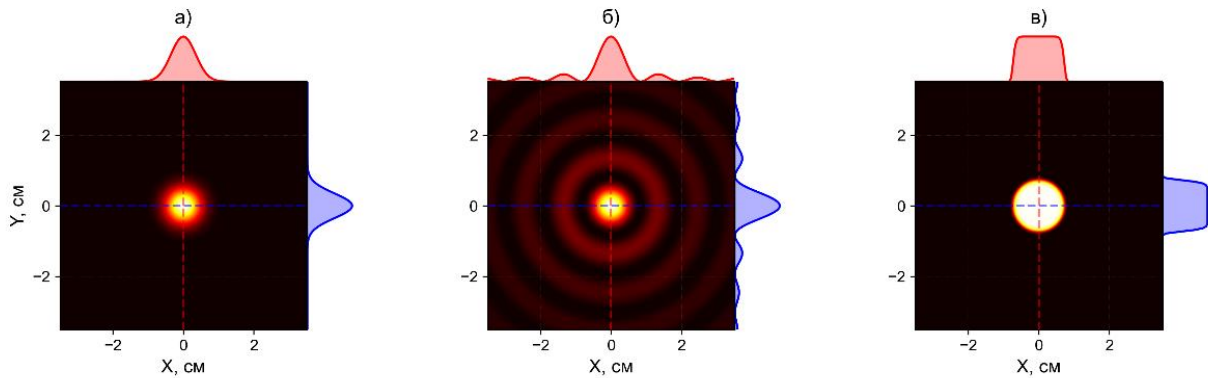
Сравнительная оценка различных профилей оптических пучков в условиях слаботурбулентной атмосферы позволяет выявить как преимущества, так и ограничения каждого типа, что особенно важно для целенаправленного выбора оптимальных решений в конкретных приложениях.

Распространение двумерного профиля вдоль выделенного направления z в свободной от источников зарядов, немагнитной, слабонеоднородной среде, в которой неоднородность аппроксимируется фазовыми экранами, описывается параксиальным волновым уравнением [1]:

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{i}{2k} \nabla_{\perp}^2 A + i\varphi A, \quad (1)$$

$$A \equiv A(x, y, z), \quad \varphi \equiv \varphi(x, y, z), \quad \nabla_{\perp}^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

где $A(x, y, z)$ – комплексная амплитуда поля, $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число, λ – длина волны, $\varphi(x, y, z)$ – фазовый набег, вносимый фазовыми экранами.



а – гауссов тип; б – бesselев тип; в – «top-hat»

Рис. 1. Двумерные профили интенсивности пучков

Турбулентная атмосфера моделируется численно с помощью фазовых экранов – тонких слоёв, расположенных на пути распространения поля. Фазовые экраны вычисляются методом преобразования Фурье. Для численного счёта используется алгоритм быстрого преобразования Фурье (БПФ) на основе

модифицированного спектра фон Кармана [1, 2]. Их энергетический спектр определяется выражением:

$$\Phi(\mathbf{k}) = 0,033 \cdot C_n^2 \cdot \frac{\exp(-\kappa^2/\kappa_m^2)}{(\kappa^2 + \kappa_0^2)^{11/6}}, \quad (2)$$

$$\mathbf{k} \equiv 2\pi(\mathbf{f}_x + \mathbf{f}_y), \quad \kappa_m \equiv 5,92/l_0, \quad \kappa_0 \equiv 2\pi/L_0,$$

где C_n^2 – структурный параметр показателя преломления (имеет размерность $[L^{-2/3}]$), f_x, f_y – пространственные (Фурье) частоты (волновые числа вдоль x, y соответственно); \mathbf{k} – вектор угловых волновых чисел, l_0 – характерный размер малых вихрей, L_0 – характерный размер крупных вихрей. Типичный фазовый экран представлен на рис. 2.

Для ограниченной по размеру расчетной сетки набегающая в связи с турбулентностью оптическая фаза определяется рядом Фурье [1]:

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_{n,m} \exp[2\pi i(f_{x_n}x + f_{y_m}y)], \quad (3)$$

где f_{x_n}, f_{y_m} – дискретные x - и y -направленные пространственные частоты (далее в работе $f_{x_n} = f_{y_m}$ – равноотстоящие узлы сетки), $c_{n,m}$ – коэффициенты разложения в ряд Фурье.

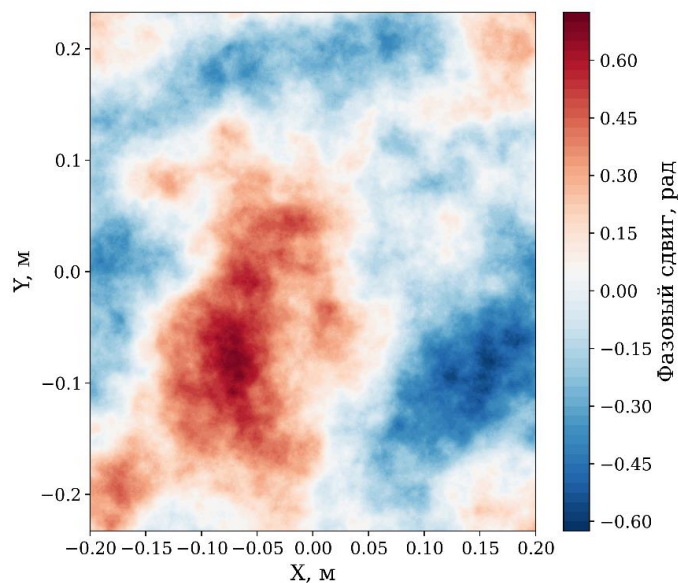


Рис. 2. Типичный фазовый экран

В связи с тем, что вариация оптической фазы при распространении в атмосферном канале связана с многократным прохождением через независимые случайные неоднородности среды, то согласно центральной предельной теореме коэффициенты в разложении (3) должны подчиняться нормальному распределению. Отметим, что коэффициенты ряда Фурье в общем случае комплексны. Вещественная и мнимая части обладают нулевыми первыми теоретическими моментами и равными дисперсиями, взаимный корреляционный момент вещественных и мнимых частей равен нулю [1, 3]. Следовательно, коэффициенты подчиняются общему комплексному нормальному распределению с дисперсией, задаваемой как

$$\langle |c_{n,m}|^2 \rangle = \Phi(f_{x_n}, f_{y_n}) \Delta f_{x_n} \Delta f_{y_n} = \Phi(f_{x_n}, f_{y_n}) \Delta f_n^2. \quad (4)$$

Решение уравнения (1) выполняется согласно следующей схеме:

$$A(x, y, z + \Delta z) = \hat{N} \mathcal{F}^{-1} \left\{ \hat{D} \mathcal{F} \{ \hat{N} A(x, y, z) \} \right\},$$

$$\hat{D} = \exp \left[- \frac{i \Delta z (k_x^2 + k_y^2)}{2k} \right], \quad \hat{N} = \exp \left[i \varphi(x, y) \cdot \frac{\Delta z}{2} \right], \quad (5)$$

где \hat{N} – оператор турбулентности, \hat{D} – оператор дифракции, \mathcal{F}^{-1} и \mathcal{F} – обратное и прямое преобразования Фурье соответственно.

Для анализа профилей пучков в конце трассы используют следующие основные параметры [1, 4–6].

Эффективный радиус пучка в конце атмосферного пути (w). Вычисляется как второй теоретический момент распределения:

$$w = \sqrt{\frac{\int \int (x^2 + y^2) I(x, y, z_{fin}) dx dy}{\int \int I(x, y, z_{fin}) dx dy}}, \quad (6)$$

$$I(x, y, z_{fin}) = |A(x, y, z_{fin})|^2,$$

где $I(x, y, z_{fin})$ – интенсивность лазерного излучения в конце атмосферного пути. Интегрирование производится по всей плоскости.

Среднеквадратическое отклонение положения центра интенсивности (блуждание):

$$\sigma_r = \sqrt{\langle (x_c - \langle x_c \rangle)^2 + (y_c - \langle y_c \rangle)^2 \rangle},$$

$$x_c = \frac{\int \int x I(x, y, z_{fin}) dx dy}{\int \int I(x, y, z_{fin}) dx dy}, y_c = \frac{\int \int y I(x, y, z_{fin}) dx dy}{\int \int I(x, y, z_{fin}) dx dy}. \quad (7)$$

Сцинтилляционный индекс:

$$\sigma_I^2 = \frac{\langle I^2 \rangle - \langle I \rangle^2}{\langle I \rangle^2}. \quad (8)$$

Коэффициент Штреля – отношение максимальной интенсивности в турбулентном распространении $I(x, y, z_f)$ к максимальной интенсивности при распространении в вакууме $I_{id}(x, y, z_f)$

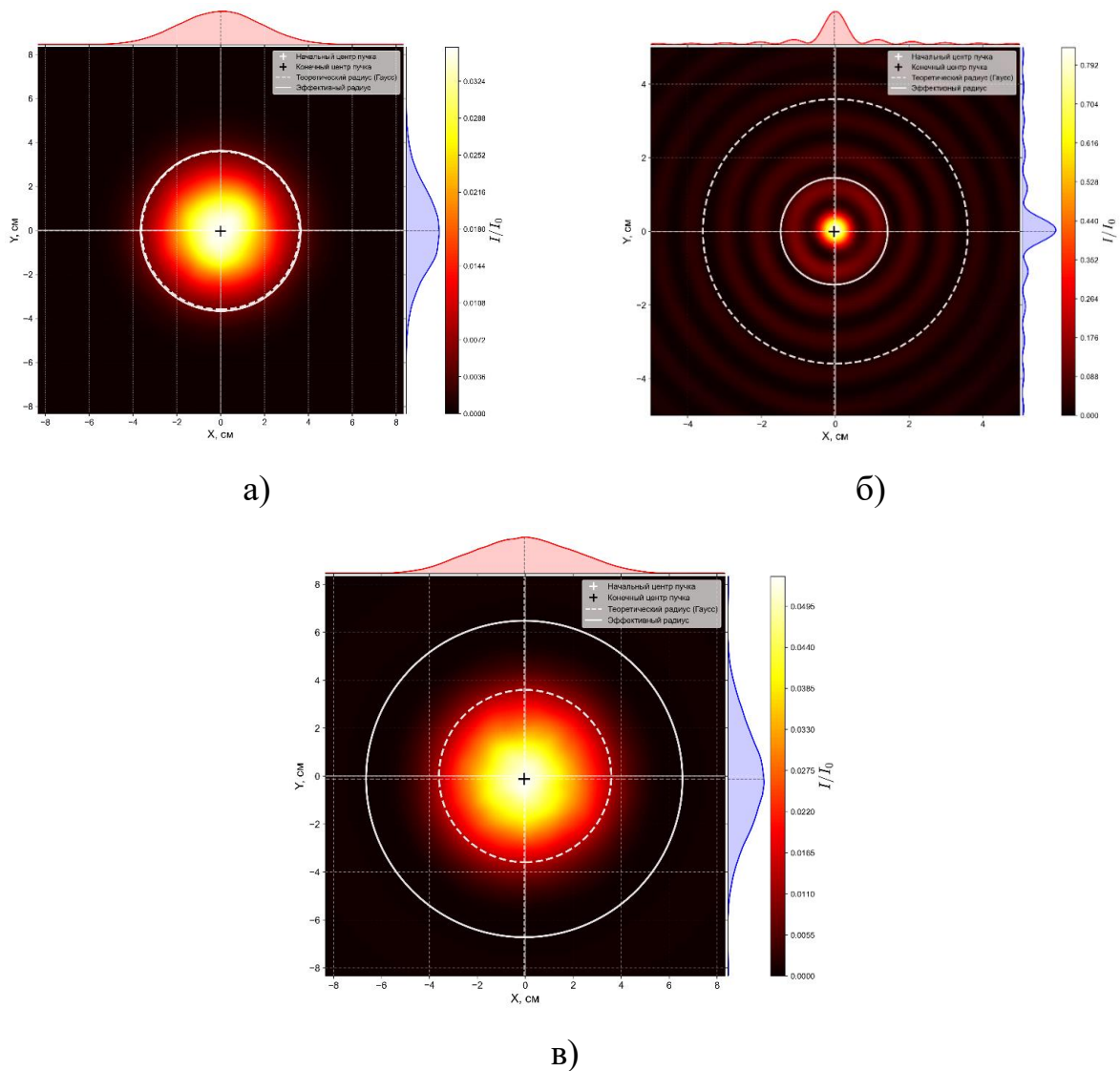
$$S = \frac{\max\{I(x, y, z_f)\}}{\max\{I_{id}(x, y, z_f)\}}. \quad (9)$$

Для сравнительного анализа было проведено моделирование вышеописанным методом распространения лазерных пучков трёх различных профилей, приведенных на рис. 1. Первоначальные радиусы пучков 7 мм, $C_n^2 = 10^{-15} \text{ м}^{-2/3}$; $l_0 = 1$ мм, $L_0 = 30$ м. Размер вычислительной области (фазовых экранов) $L = 50$ см; длина волны излучения $\lambda = 1550$ нм. Результаты моделирования показаны на рис. 3.

Таблица 1. Начальные и рассчитанные характеристики лазерных пучков различных профилей, прошедших через атмосферу

Тип пучка:	Гауссов	Бесселев	«top-hat»
Первоначальный характерный размер, мм	7	12	7
Эффективный радиус, мм	36.5	14.5	83.5
Блуждание, мм	2	3	2
Сцинтилляционный индекс	0.1253	0.5484	0.2722
Коэффициент Штреля	0.9758	0.9746	0.9980

Из данных таблицы 1 и результатов моделирования видно, что гауссов пучок демонстрирует наименьший уровень флуктуаций интенсивности, что согласуется с его локализованной пространственной структурой и устойчивостью к мелкомасштабным возмущениям. Сцинтилляционный индекс для гауссова пучка составляет ~ 0.125 , что существенно ниже, чем у других исследуемых профилей. При этом блуждание центра пучка составляет порядка 2 мм, а коэффициент Штреля сохраняется на уровне 0.976, указывая на незначительные потери когерентности при распространении в турбулентной атмосфере.



а – гауссов; б – бesselев; в – «top-hat»

Рис. 3. Двумерные профили распределения интенсивности прошедших через атмосферный канал пучков

Бесселев пучок, несмотря на известные свойства самовосстановления, в данной конфигурации продемонстрировал наибольшее блуждание центра – порядка 3 мм, а также самый высокий уровень флуктуаций интенсивности с индексом сцинтилляции около 0.548. Это связано с выраженной кольцевой структурой и особенностями распределения энергии, при которых пучок взаимодействует с большей областью турбулентной среды. При этом коэффициент Штреля остаётся высоким (около 0.975), что свидетельствует о сохранении пиковой интенсивности. Важно отметить, что для бесселевого пучка начальный и конечный размеры оценивались по положению первого минимума и первого кольца, то есть с учётом всей центральной структуры. Такой подход отражает тот факт, что бесселев пучок в представленных условиях эффективно занимает всю апертуру численного окна. Эффективный радиус в финальной точке также был рассчитан аналогично и составляет порядка 1.45 см, что сопоставимо с половиной размера расчетной сетки. Тем не менее, из-за природы бесселевых пучков параметр эффективного радиуса имеет ограниченную интерпретацию, и в задачах пространственной локализации могут быть более уместны альтернативные метрики, например, FWHM центрального максимума.

Профиль типа «top-hat» продемонстрировал наилучшее сохранение пикового значения интенсивности, что подтверждается коэффициентом Штреля, почти равным единице, и малым блужданием центра (~2 мм). При этом уровень флуктуаций интенсивности оказался промежуточным – около 0.272, что объясняется резкой фронтальной границей пучка и более высокой чувствительностью к дифракционному расширению. Эффективный радиус «top-hat» пучка в конце распространения значительно превышает таковой у других профилей, что также видно на графиках интенсивности (рис. 3).

Таким образом, полученные результаты указывают на преимущества гауссовых пучков в задачах, требующих высокой стабильности распределения интенсивности и минимальных флуктуаций, а также неэффективность «top-hat» пучков в условиях, где критично сохранение пиковой яркости. Бесселевы пучки,

несмотря на сохранение центра интенсивности, показали чувствительность к турбулентным возмущениям, что ограничивает их применимость в системах с выраженными требованиями к однородности распределения в условиях атмосферной турбулентности.

Список литературы

1. Schmidt J. D. Numerical simulation of optical wave propagation with examples in MATLAB / J. D. Schmidt. – Bellingham: SPIE Press, 2010. – 195 p.

2. Charnotskii M. Comparison of four techniques for turbulent phase screens simulation / M. Charnotskii // Journal of the optical Society of America A. 2020. Vol. 37. P. 738-747.

3. Zhang D. Atmospheric turbulence phase screen modeling method based on sub-bands division and multirate sampling / D. Zhang [et al.] // Optik. 2018. V. 163. P. 72-80.

4. Khan A. N. Atmospheric propagation of space-fractional Gaussian-beam waves in a FSO communication system / A. N. Khan, U. Younis // Optics Express. 2022. V. 30. No2/17. P. 1570-1573.

5. Васильев В. С. Распространение пучков Бесселя и суперпозиций вихревых пучков в атмосфере / В. С. Васильев [и др.] // Компьютерная оптика. 2019. Т. 43 (3). С. 376-384.

6. Горбунов М. Е. Метод сферических фазовых экранов для моделирования расходящихся волновых пучков в неоднородных средах / М. Е. Горбунов, О. А. Коваль, А. Е. Мамонтов // Известия Российской академии наук. Физика атмосферы и океана. 2020. Т. 56 (1). С. 66-75.

References

1. Schmidt J. D. Numerical simulation of optical wave propagation with examples in MATLAB / J. D. Schmidt. – Bellingham: SPIE Press, 2010. – 195 p.
2. Charnotskii M. Comparison of four techniques for turbulent phase screens simulation / M. Charnotskii // Journal of the optical Society of America A. 2020. Vol. 37. P. 738-747.
3. Zhang D. Atmospheric turbulence phase screen modeling method based on sub-bands division and multirate sampling / D. Zhang [et al.] // Optik. 2018. V. 163. P. 72-80.
4. Khan A. N. Atmospheric propagation of space-fractional Gaussian-beam waves in a FSO communication system / A. N. Khan, U. Younis // Optics Express. 2022. V. 30. No2/17. P. 1570-1573.
5. Vasiliev V. S. Propagation of Bessel beams and superpositions of vortex beams in the atmosphere / V. S. Vasiliev [et al.] // Computer Optics. 2019. V. 43. No 3. P. 376-384.
6. Gorbunov M. E. Method of spherical phase screens for modeling diverging wave beams in inhomogeneous media / M. E. Gorbunov, O. A. Koval, A. E. Mamontov // Izvestiya RAS. Physics of the Atmosphere and Ocean. 2020. V. 56. No 1. P. 66-75.

DOI: 10.58168/OpEq2025_113-127

УДК 622.76, 519.218.82

АНАЛИЗ ДАННЫХ ГИДРОРАЗРЫВА ПЛАСТА
ANALYZING HYDRAULIC FRACTURING DATA

Максимов Максим Сергеевич

Хуснияров Руслан Маратович

студенты Института информатики, математики и робототехники

Уфимского университета науки и технологий, г. Уфа, Россия

Maximov Maxim Sergeevich

Khusniyarov Ruslan Maratovich

students of the Institute of Informatics, Mathematics and Robotics, Ufa University of
Science and Technology, Ufa, Russia.

Аннотация. В работе рассматривается анализ волн давления, регистрируемых при резкой остановке подачи жидкости разрыва в нефтяную скважину, их обработка, подготовка для получения информации об успешности проводимой операции гидроразрыва пласта. Изучается возможность применения для этих целей нейронных сетей.

Abstract. The paper deals with the analysis of pressure waves registered at an abrupt stop of fracturing fluid supply to an oil well, their processing, preparation for obtaining information on the success of the hydraulic fracturing operation. The possibility of application of neural networks for these purposes is studied.

Ключевые слова: нефтяная скважина, гидроудар, хаммер – эффект, собственные колебания, гидроразрыв, МГРП, большие данные, кепстр.

Keywords: oil well, water hammer, natural oscillations, hydraulic fracturing, big data, cepstrum.

В современной нефтегазовой промышленности создание высоко проводимых трещин в нефтяных и газовых пластах является основным методом повышения эффективности добычи нефти. Для этого в нефтяной пласт вводят специальный расклинивающий раствор под высоким давлением через перфорационные отверстия. Этот процесс приводит к образованию трещин в пласте. В работе рассматривается задача определения точек инициации трещин гидроразрыва пласта (ГРП) с помощью спектрального анализа данных устьевых датчиков давления.

При эксплуатации горизонтальных нефтяных скважин с применением технологии многостадийного гидроразрыва пласта (МГРП) с течением времени возникает необходимость оживления ставших малопродуктивными скважин. При этом часто применяется технология «слепого гидроразрыва», когда в скважину под большим давлением нагнетается расклинивающий раствор, какие-то из старых трещин при этом активируются. Возникают вопросы: как определить, какие из трещин активированы? Не следует ли провести дополнительные закачки раствора? Устанавливать контролирующие приборы на большой глубине в стволе скважины, если даже возможно, то получить с них оперативную информацию не удастся, т.к. необходимо поднять приборы на поверхность. Доступным методом контроля является измерение давления на устье скважины. Теоретические работы [1] – [5] дают информацию, что гидроудар (хаммер – эффект), наблюдаемый при остановке закачки жидкости разрыва, при остановке насосов может быть использован для диагностики трещин ГРП. Быстро затухающие колебания давления (примерно 30 – 40 секунд) с периодичностью 8 – 10 секунд в совокупности с более мелкими фиксируемыми колебаниями при анализе позволяют определить успешность проведенной операции ГРП.

На Рис. 1 показана схема ГРП на горизонтальной скважине, а на Рис.3 схема многостадийного гидроразрыва пласта (МГРП), когда перпендикулярно

оси скважине создается не одна трещина, а целая сеть высокопроизводительных трещин.

В работе основное внимание уделяется методам предсказания геометрии трещины. Рассматриваются подходы, основанные на использовании искусственного интеллекта и математических методов, таких как применение кепстра, интерполяции и различных методов преобразования сигналов. В рамках исследования выполнены эксперименты по преобразованию и очистке данных от шумов. Поставлены и проведены различные эксперименты для улучшения точности обработки данных и разработки эффективных подходов к интерпретации сигналов.

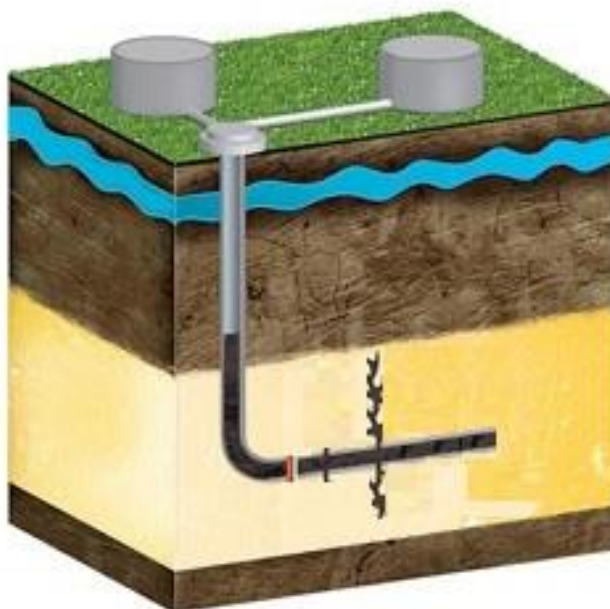


Рис. 1 Гидроразрыв пласта. Горизонтальная скважина.

Вертикальная трещина, перпендикулярная оси скважины.

Изучение характеристик процесса ГРП с использованием анализа различных данных (например, использование данных с датчика устьевого давления) является одной из рассматриваемых тем. Из интересных работ можно отметить работу [6], в которой описан метод MWF, позволяющий отслеживать эффективность ГРП с использованием обработки сигналов. Анализ хаммера происходит с применением обратного преобразование Фурье от логарифма

спектра сигнала. Такое преобразование называют кепстральным. Слово «кепстр» образовано перестановкой букв в слове «спектр» и стало использоваться при обработке сигналов [7]. Методы кепстрального анализа применяются в данной работе.

Также можно выделить работу Shijie Deng, Liangping Yi [8], в которой также описываются методы обработки сигналов ГРП, в особенности с применением вейвлет фильтров, которые позволяют разделить хаммер на сумму частот, для того чтобы избавиться от высокочастотных частот. Данный подход также использовался для анализа сигналов в данной работе.

Не так давно (в 2024) в работе [9] были упомянуты попытки оценить, являются ли сигнальные характеристики (хаммеры), а также другие параметры ГРП информативными для использования их признаков для методов прогнозирования с использованием Машинного обучения.

Данные, снятые с высокочастотных датчиков, являются идеальными. А именно, встречаются различные помехи, обрывы и шумы в данных, которые могут повлиять на результаты анализа (Рис.2).

Для решения этой проблемы применяют методы очистки и предобработки данных, которые могут помочь выделить желательные компоненты сигнала, а также подавить нежелательные (разрывы, шумы и тд).

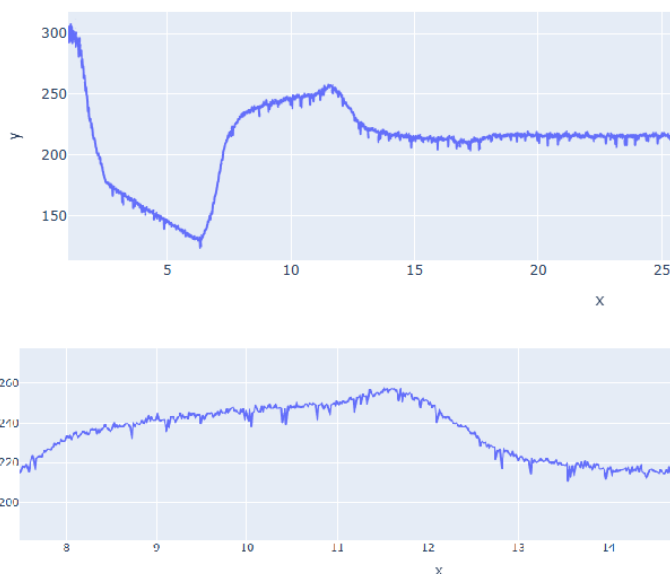


Рис. 2 Пример зашумленных данных

В исходных данных как раз имелись 2 проблемы – пропуски в данных (т.е. они были не равномерными по времени), а также, как видно на Рис. 2 – присутствовали шумы.

Для того, чтобы убрать пропуски, было решено использовать методы интерполяции. Чтобы убрать шумы, были опробованы различные фильтры для очистки сигнала. Для использования этих методов выбран язык программирования Python. Было проведено сравнение различных методов, были выбраны три метода из библиотеки SciPy: CubicSpline, Akima1DInterpolator, PchipInterpolator. Для очистки данных от шумов были использованы различные реализации фильтров на языке Python: скользящее среднее, медианный фильтр, экспоненциальное бегущее среднее, скользящее среднее + медианный фильтр, Фильтр Калмана.

Для дальнейшей обработки сигнала был использован вейвлет – анализ. Сигнал раскладывается на набор частот и остатка, сумма которых равна нашему сигналу. А значит, после разложения мы можем «выкинуть» «шумные» частоты, тем самым оставив только полезный для нас сигнал.

На Рис. 3 можем заметить, что наш сигнал раскладывается на 10 частот и остаток. Первые 3-4 частоты можно убрать, так как по график видно, что они «зашумленные».

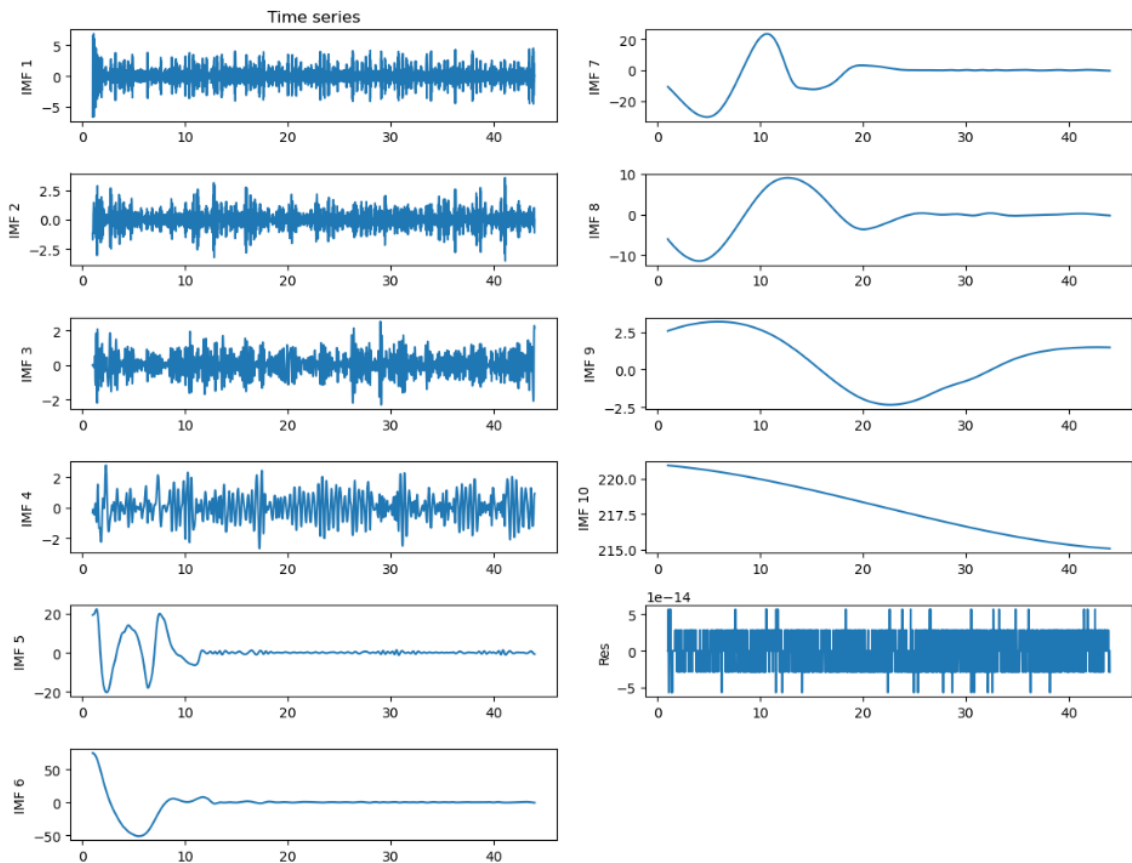


Рис. 3 Разложение нашего исходного зашумленного сигнала на частоты при помощи вейвлет преобразований

Следующей процедурой обработки сигнала является кепстральный анализ: вычисляется преобразование Фурье, берется логарифм образа и вычисляется обратное преобразование Фурье. В результате мы получаем кривую, на которой пики (максимумы, минимумы) соответствуют различным событиям в стволе скважины: изменение диаметра труб, НКТ, утечки, муфты дают отраженный сигнал. Зная геометрию скважины, мы определяем скорость волны (скорость звука в скважине) и приблизительно можем определить точки инициации трещин ГРП. Если расстояние между точками возможной инициации более 50 метров, метод дает неплохие результаты.

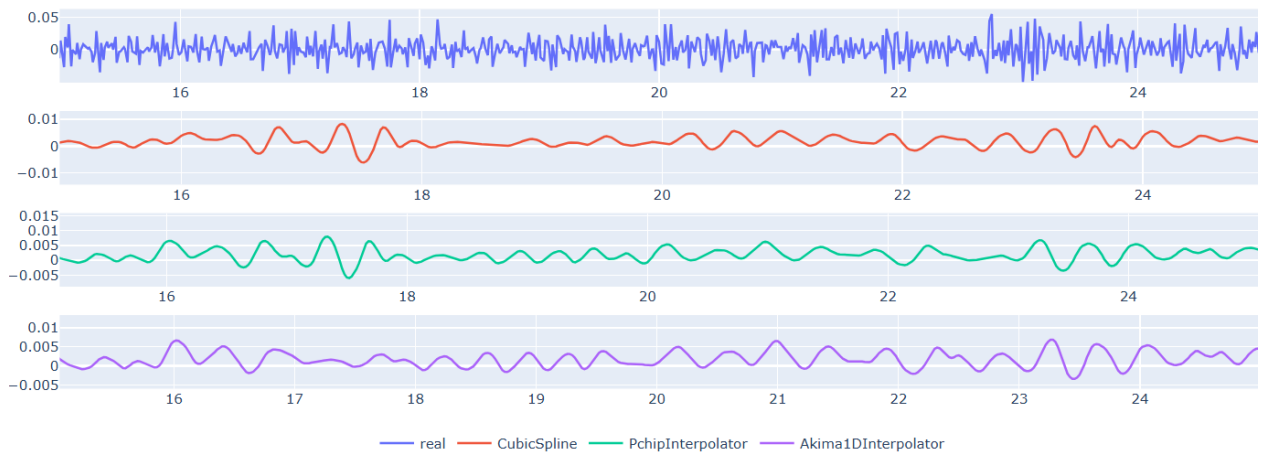


Рис. 4 Сравнение кепстров до очистки хаммера и после применения вейвлет – анализа и различных методов интерполяции

Для моделирования основного сигнала при ГРП была использована функция вида:

$$y(t) = Ae^{-\tau t} \cos(\omega t + \phi) + Qe^{-pt} + D \quad (1)$$

где A – амплитуда, τ – постоянная затухания синусоиды, ω – угловая частота или скорость изменения угла колебаний, ϕ – фазовый угол при $t=0$, используемый для сдвига функции в целях соответствия начальным условиям данных. Коэффициенты Q , p и D – дополнительные параметры для лучшей аппроксимации.

Нахождение неизвестных коэффициентов было сделано с помощью метода наименьших квадратов, реализованного в библиотеке `scipy` на языке Python.

На основе экспериментальных данных был собран датасет из 90 хаммер-эффектов, в котором для каждого хаммера имелись данные: тип ГРП (замещение, мини, ОГРП), НКТ, верхняя и нижняя перфорация, номер скважины, время хаммера, значения давления. Были применены методы интерполяции, вейвлет-очистки, каждому очищенному хаммеру были найдены коэффициенты для кривой.

Перед поиском корреляции из датасета коэффициентов были выкинуты выбросы, а именно строки данных, в которых значения коэффициентов выбивались из среднего значения, для этого визуально оценивались данные при

помощи гистограммы, построенной библиотекой seaborn методом `displot` (Рис.5). Построен график `scatter plot`, на котором визуально можно оценить зависимость данных между друг другом. В конечном итоге, наибольшая зависимость геометрии трещины с коэффициента была выявлена только с коэффициентами ω и τ , диаграмма и численные значения корреляции изображены на рисунках 6 (а-б).

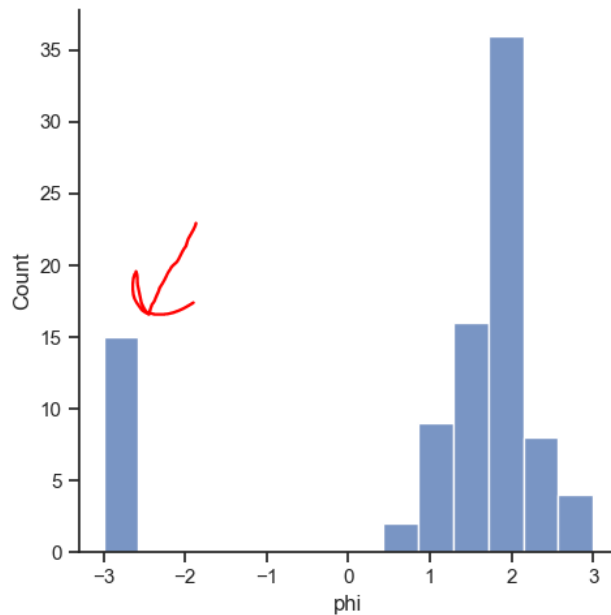


Рис. 5 Гистограмма для коэффициента ϕ . Виден выброс, который может исказить информацию о его корреляции с перфорацией.

Численное значение корреляции равно -0.69 , а также p -value равно $4.965e-11$, то есть, оно меньше 0.05 , что говорит о том, что мы можем отвергнуть нулевую гипотезу, и говорить о том, что значение этой корреляции статистически значима. С другими коэффициентами корреляции не было обнаружено.

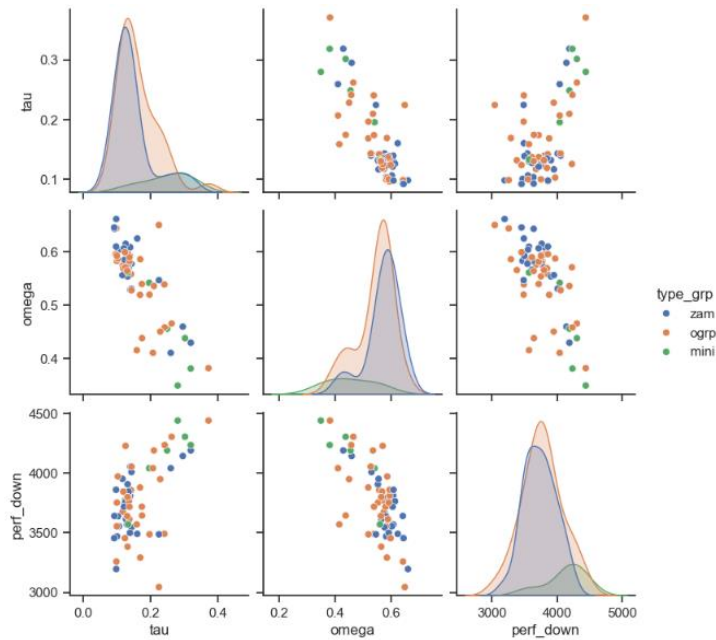


Рис. 6(а) Scatter plot для данных ω , τ и нижней перфорации

	nkt	perf_down	perf_up	a	<u>omega</u>	phi	<u>tau</u>	Q	p	D
nkt	1.000000	0.156094	0.154510	0.094372	-0.052796	-0.129449	-0.317267	0.163955	0.130157	0.015542
<u>perf_down</u>	0.156094	1.000000	0.999996	0.376104	<u>-0.698528</u>	0.374676	<u>0.565170</u>	-0.242295	0.103585	0.220112
perf_up	0.154510	0.999996	1.000000	0.375680	-0.698377	0.374594	0.565550	-0.242368	0.102648	0.219872
a	0.094372	0.376104	0.375680	1.000000	-0.732671	0.383429	0.647990	-0.002652	-0.149614	0.101717
omega	-0.052796	-0.698528	-0.698377	-0.732671	1.000000	-0.584136	-0.809716	0.196885	0.107733	-0.249138
phi	-0.129449	0.374676	0.374594	0.383429	-0.584136	1.000000	0.449746	-0.222497	0.086682	0.147046
tau	-0.317267	0.565170	0.565550	0.647990	-0.809716	0.449746	1.000000	-0.152810	-0.122660	0.134363
Q	0.163955	-0.242295	-0.242368	-0.002652	0.196885	-0.222497	-0.152810	1.000000	-0.477769	-0.922068
p	0.130157	0.103585	0.102648	-0.149614	0.107733	0.086682	-0.122660	-0.477769	1.000000	0.456341
D	0.015542	0.220112	0.219872	0.101717	-0.249138	0.147046	0.134363	-0.922068	0.456341	1.000000

Рис. 6(б) Численные значения корреляций для данных коэффициентов и геометрии трещины

На данном этапе были получены коэффициенты кривой (1) к хаммер-эффектам в количестве 90. Проведен анализ этих коэффициентов, очищенные выбросы. Было выявлено, что коэффициент ω имеет линейную зависимость от размера перфорации трещины.

Работа была продолжена с показаниями датчиков давления во время ГРП и рассмотрены другие параметры ГРП, которые имеются в отчетах.

В нашей базе имелось было 168 отчетов по ГРП с различных месторождений. Сложность автоматического сбора была в том, что отчеты имели разный формат. Поэтому сбор данных осуществлялся вручную.

Были собраны следующие параметры: тип ГРП (замещение, мини ГРП, ОГРП), ISIP, эффективность жидкости, давление закрытие устье, давление закрытие забой, потери давление на трение, градиент разрыва, азимут, общий объем закаченной жидкости, давление начальное, давление конечное, давление среднее, перфорация верхняя\нижняя, НКТ, разность между 1 и последним портом скважины.

В связи с разными форматами отчетов, не все параметры для каждой скважины удалось собрать. Поэтому в датасете присутствует различное количество пропусков по параметрам: ISIP – 13, эффективность жидкости – 110, давление закрытия устье – 109, давление устье забой - 139, азимут – 129, градиент разрыва – 144, давление начальное\конечное – 67. Можно заметить, что некоторые параметры имеют больше половины пропусков, мы не обращали на них сильного влияние, но ниже по ним будет построения матрица корреляций.

На Рис. 7 приведена тепловая карта корреляции Пирсона параметров между друг другом.

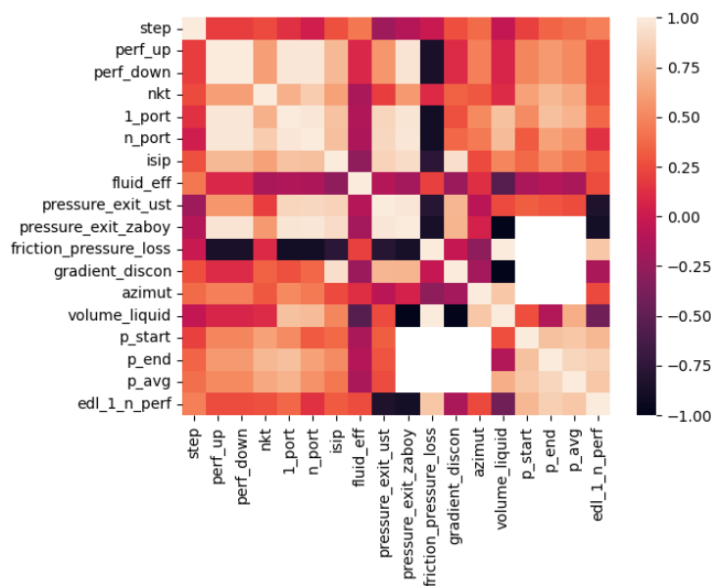


Рис. 7 Heatmap корреляции Пирсона между собранными параметрами

Обратив внимание на корреляцию данных с верхней перфорацией ($perf_up$) по абсолютному значению можно выделить ISIP, начальное давление, среднее давление и конечное давление. Остальные заметные по корреляции параметры не были выделены в связи большого количества в них пропусков (то есть, не репрезентативностью).

Ниже на Рис. 8 (а-б) приведены Scatter plots и численное значение корреляции выделенных параметров и нижней перфорации.

Проведен статистический тест, в рамках которого была посчитана корреляция Спирмана, Пирсона и Кендала между вышеперечисленными параметрами, и оценена p -value для каждого из них. В качестве α было взято значение 0.05, выше которого мы отклоняли нулевую гипотезу о том, что корреляции нет. Таким образом, вычисляли статистически значимые корреляции.

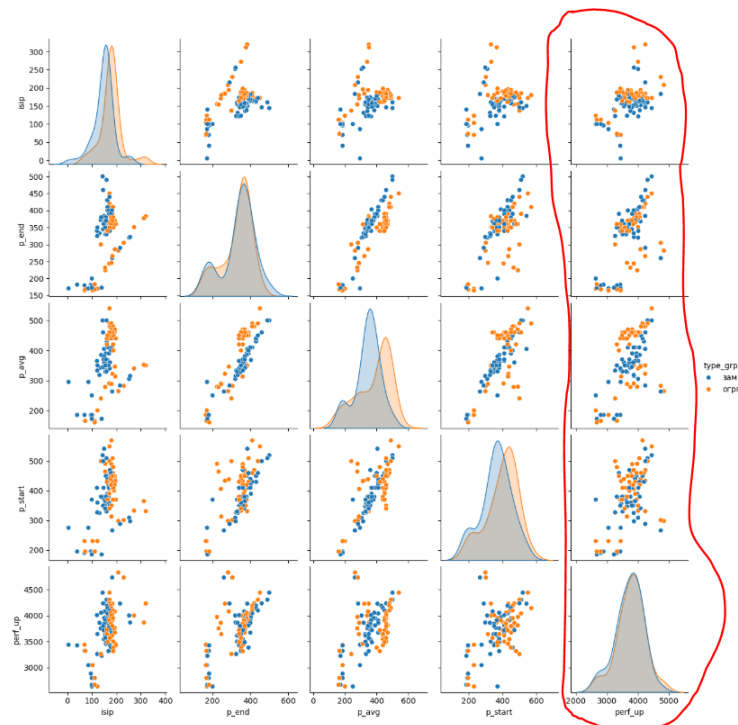


Рис. 8 (а) Pairplot зависимости ISIP, начального\среднего\конечного давления и верхней перфорации. Оранжевым выделены значения на ОГРП, синим – на замещении.

	perf_up	isip	p_start	p_avg	p_end
perf_up	1.000000	0.737119	0.498248	0.511998	0.584464
isip	0.737119	1.000000	0.372157	0.436847	0.520657
p_start	0.498248	0.372157	1.000000	0.811634	0.773809
p_avg	0.511998	0.436847	0.811634	1.000000	0.883614
p_end	0.584464	0.520657	0.773809	0.883614	1.000000

Рис. 8 (б) Численное значение зависимости ISIP, начального\среднего\конечного давления и верхней перфорации.

Этот результат наталкивает на мысль, что с увеличением количества данных есть вероятность того, что мы сможем наблюдать корреляцию перфорации скважины с ISIP, а также с начального, среднего и конечно давления после ГРП.

Помимо вышесказанного, была проделана работа по сопоставлению графиков кепстра и хаммер-эффекта, для нахождения «интересных точек».

Сопоставив графики хаммер-эффекта и кепстра после очистки от шумов, а также используя информацию о конструкции скважины, становится возможно определить скорость распространения звуковой волны и обнаружить точки инициации трещины при проведении повторного ГРП.

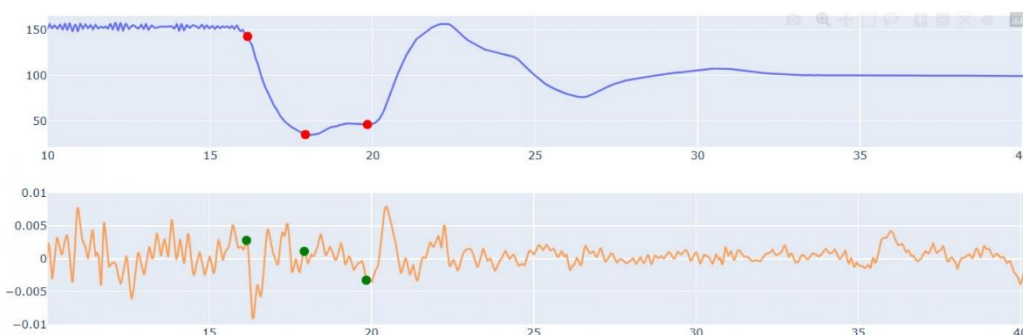


Рис. 9 Анализ хаммер-эффекта.

Для наилучшего результата требуется запись с высокочастотного датчика давления с характеристиками порядка 100Гц.

Ведется исследовательская работа по уточнению модели определения точек образования трещин, для чего требуется большой объем практических данных.

В этой части работы было обработано 168 скважин, с которых были собраны различные параметры после ГРП. В связи с различными форматами отчета, в данных было значительное количество пропусков по различным параметрам, поэтому были проанализированы ISIP, начальное\среднее\конечное давление. Анализ и статистические тесты показали, что на небольшом количестве данных видна численная и визуальная корреляция этих параметров с перфорацией скважины. Для уточнения данных требуется увеличения данных и создание более репрезентативной выборки.

Список литературы

1. Байков В.А. К оценке геометрических параметров трещины гидроразрыва пласта / В.А. Байков, Г.Т. Булгакова, А.М. Ильясов, Д.В. Кашапов // Известия РАН. Механика жидкости и газа. – 2018. – № 5. – С. 64–75.

2. Ляпидевский В. Ю., Неверов В. В., Кривцов А. М. Математическая модель гидроудара в вертикальной скважине // Сиб. электрон. матем. изв. 2018. №15. С. 1687–1696

3. Башмаков Р.А. Собственные колебания жидкости в скважине, сообщающейся с пластом, при наличии трещины ГРП / Р.А. Башмаков, Д.А. Насырова, В.Ш. Шагапов // Прикладная математика и механика. – 2022. – Т. 86. – № 1. – С. 88–104.

4. Шагапов В.Ш. Затухающие собственные колебания жидкости в скважине, сообщающейся с пластом / В.Ш. Шагапов, Р. Башмаков, Г.Р. Рафикова, З.З. Мамаева // Прикладная механика и техническая физика. – 2020. – №. 4. – С. 1–14.

5. Шагапов В.Ш. Анализ коллекторских характеристик призабойной зоны пласта, подверженного гидравлическому разрыву по собственным колебаниям столба жидкости в скважине / В.Ш. Шагапов, Г.Р. Рафикова, Р.А. Башмаков, З.З. Мамаева // Инженерно–физический журнал. – 2023. – Т. 96. – № 2. – С. 281–288.

6. Korkin R. High Frequency Pressure Monitoring and Data Analytics for Stimulation Efficiency Determination: New Perspectives or Potential Limits / R. Korkin, S. Parkhonyuk, A. Fedorov, D. Badazhkov, A. Kabannik // The Woodlands, Texas, USA. – February 2020. doi: <https://doi.org/10.2118/199762-MS>

7. Oppenheim A. V. Digital Signal Processing / Alan V. Oppenheim, Ronald W. Schaffer. - PRENTICE HALL, INC. , New Jersey, 1979

8. Shijie, D. A diagnostic model for hydraulic fracture in naturally fractured reservoir utilising water-hammer signal /D. Shijie, Y. Liangping, L. Xiaogang. Text: electronic. / Research Square, 2024. – P.45 URL: https://www.researchgate.net/publication/379798861_A_diagnostic_model_for_hydraulic_fracture_in_naturally_fractured_reservoir_utilising_water-hammer_signal

9. Sheludko, S. Machine-Learning Assisted Analysis of Frac Water Hammer / S. Sheludko, E. Crawford, M. Oparin, F. Aleid Text: electronic. // Paper presented at the SPE Hydraulic Fracturing Technology Conference and Exhibition, 2024.–P. 11 – URL: <https://onepetro.org/SPEHFTC/proceedings-abstract/24HFTC/24HFTC/D031S007R005/540625>

References

1. Baikov V.A. To the estimation of the geometric parameters of the hydraulic fracturing crack / V.A. Baikov, G.T. Bulgakova, A.M. Ilyasov, D.V. Kashapov // Izvestiya of the Russian Academy of Sciences. Fluid Mechanics. – 2018. – No. 5. – Pp. 64–75.

2. Lyapidevsky V. Yu., Neverov V. V., Krivtsov A. M. Mathematical model of hydro-impact in a vertical well // Sib. electron. mat. izv. 2018. No. 15. Pp. 1687–1696

3. Bashmakov, R.A. Natural Oscillations of a Fluid in a Well Communicating with a Reservoir in the Presence of a Hydraulic Fracture / R.A. Bashmakov, D.A. Nasyrova, and V.Sh. Shagapov // Applied Mathematics and Mechanics. – 2022. – V. 86. – No. 1. – Pp. 88–104.

4. Shagapov V.Sh. Damped natural oscillations of a fluid in a well communicating with a reservoir / V.Sh. Shagapov, R Bashmakov, G.R. Rafikova, Z.Z. Mamaeva // Applied Mechanics and Technical Physics. – 2020. – No. 4. – Pp. 1–14.

5. Shagapov, V.Sh. Analysis of the reservoir characteristics of the bottom-hole zone of a fractured reservoir based on the natural oscillations of the fluid column in the well / V.Sh. Shagapov, G.R. Rafikova, R.A. Bashmakov, and Z.Z. Mamaeva // Engineering and Physics Journal, 2023, Vol. 96, No. 2, pp. 281-288.

6. Korkin R. High Frequency Pressure Monitoring and Data Analytics for Stimulation Efficiency Determination: New Perspectives or Potential Limits / R. Korkin, S. Parkhonyuk, A. Fedorov, D. Badazhkov, A. Kabannik // The Woodlands, Texas, USA. – February 2020. doi: <https://doi.org/10.2118/199762-MS>

7. Oppenheim A. V. Digital Signal Processing / Alan V. Oppenheim, Ronald W. Schaffer. - PRENTICE HALL, INC., New Jersey, 1979

8. Shijie, D. Diagnostic model of hydraulic fracturing of a reservoir with natural fracturing using a hydrodynamic shock signal /D. Shijie, Yu. Liangping, L. Xiaogang. Text: electronic. / Research Square, 2024. – P.45 URL: https://www.researchgate.net/publication/379798861_A_diagnostic_model_for_hydraulic_fracture_in_naturally_fractured_reservoir_utilising_water-hammer_signal

9. Sheludko, S. Analysis of Hydraulic Shock During Hydraulic Fracturing Using Machine Learning / S. Sheludko, E. Crawford, M. Oparin, and F. Aleid. // Report presented at the SPE Hydraulic Fracturing Technology Conference and Exhibition, 2024. - P. 11 - URL: <https://onepetro.org/SPEHFTC/proceedings-abstract/24HFTC/24HFTC/D031S007R005/540625>

DOI: 10.58168/OpEq2025_128-138

УДК 674; 681.5

**РАЗРАБОТКА АРХИТЕКТУРЫ АВТОМАТИЗИРОВАННОЙ
СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ЛЕСОПИЛЬНЫМ ОБОРУДОВАНИЕМ**
DEVELOPMENT OF ARCHITECTURE OF AUTOMATED CONTROL SYSTEM
FOR SAWING EQUIPMENT

Мещерякова Анна Анатольевна

кандидат технических наук, доцент ФГБОУ ВО «Воронежский
государственный лесотехнический университет имени Г.Ф. Морозова,
Воронеж, Россия

Грибанов Андрей Анатольевич

кандидат технических наук, доцент ФГБОУ ВО «Воронежский
государственный лесотехнический университет имени Г.Ф. Морозова,
Воронеж, Россия

Meshcheryakova Anna Anatolyevna

Candidate of Technical Sciences, associate professor Voronezh State University
of Forestry and Technologies named after G.F. Morozov, Voronezh, Russia

Gribanov Andrey Anatolyevich

Candidate of Technical Sciences, associate professor Voronezh State University
of Forestry and Technologies named after G.F. Morozov, Voronezh, Russia

Аннотация. Статья посвящена разработке автоматизированной системе управления лесопильным оборудованием с целью максимизации экономического эффекта от использования пиловочного сырья путем его рационального распределения между различными типами оборудования

Abstract. The article is devoted to the development of an automated control system for sawmill equipment in order to maximize the economic effect of using sawn timber by rationally distributing it between different types of equipment.

Ключевые слова: автоматизированная система управления, компоненты системы, экономическая эффективность, системы управления, лесопильное оборудование, алгоритм.

Keywords: automated control system, system components, economic efficiency, control systems, sawmill equipment, algorithm.

Автоматизированная система управления (АСУ) лесопильным оборудованием представляет собой комплекс технических и программных средств, направленных на повышение эффективности производства за счет оптимизации процессов распиловки древесины [1-3]. Рассмотрим архитектуру АСУ на конкретном примере с использованием цифровых показателей из предоставленного материала.

Целью разработки АСУ является максимизация экономического эффекта от использования пиловочного сырья путем его рационального распределения между различными типами оборудования. В качестве примера рассмотрим партию сырья объемом 100 000 м³, разделенную на 4 размерные группы: диаметром 16 см (20%), 22 см (50%), 28 см (20%) и 32 см (10%).

Основные компоненты АСУ.

Сенсоры. Сенсоры обеспечивают сбор данных о параметрах сырья и состоянии оборудования [2, 4]. Для рассматриваемого примера используются следующие датчики:

– лазерные датчики (измеряют диаметр бревен в пределах от 16 до 32 см, точность измерений составляет ± 1 мм);

– камеры машинного зрения (анализируют форму бревен и выявляют дефекты поверхности, обрабатывают данные со скоростью 100 бревен в минуту);

– датчики производительности (отслеживают объем переработанной древесины. Например, оборудование №1 обрабатывает 60 000 м³/год для бревен диаметром 16 см);

– температурные датчики (контролируют нагрев режущих инструментов, предотвращая перегрев выше 80°С).

Контроллеры. Контроллеры обрабатывают данные, поступающие от сенсоров, и формируют управляющие сигналы [4]. В примере используются три типа оборудования:

– оборудование №1 (капитальные затраты: 4600 тыс. руб.; эксплуатационные затраты (CF): 7500 тыс. руб./год; срок службы: 10 лет; эквивалентный аннуитет (EA) при ставке дисконтирования 10%: 7094 тыс. руб./год);

– оборудование №2 (капитальные затраты: 4200 тыс. руб.; эксплуатационные затраты (CF): 6500 тыс. руб./год; срок службы: 10 лет; эквивалентный аннуитет (EA): 6178 тыс. руб./год);

– оборудование №3 (капитальные затраты: 4500 тыс. руб.; эксплуатационные затраты (CF): 6000 тыс. руб./год; срок службы: 10 лет; эквивалентный аннуитет (EA): 5790 тыс. руб./год).

Исполнительные механизмы. Исполнительные механизмы реализуют управляющие воздействия. Для рассматриваемого примера:

– электродвигатели (управляют подачей бревен со скоростью до 60 м/мин; обеспечивают точность позиционирования ± 0.5 мм);

– гидравлические приводы (перемещают зажимы для фиксации бревен с усилием до 5 тонн; обеспечивают время срабатывания менее 0,5 секунд);

– роботизированные манипуляторы (загружают бревна на оборудование со скоростью 15 штук в минуту; сортируют готовые пиломатериалы с точностью 99.9%).

Архитектура АСУ строится по многоуровневому принципу:

1. Нижний уровень (сенсорный уровень):

– лазерные датчики передают данные о диаметре бревен на средний уровень через интерфейс Modbus;

– температурные датчики отправляют данные о нагреве режущих инструментов каждые 10 секунд.

2. Средний уровень (контроллерный уровень):

– контроллеры обрабатывают данные и формируют управляющие сигналы. Например, для оборудования №1 рассчитывается оптимальная скорость подачи бревен диаметром 16 см (60 м/мин).

3. Верхний уровень (операторский уровень):

– SCADA–система отображает данные о производительности каждого типа оборудования в реальном времени. Например, оператор видит, что оборудование №1 обрабатывает 60 000 куб. м/год для бревен диаметром 16 см.

Программное обеспечение включает:

1) базы данных – хранят информацию о распределении сырья: 20 000 куб. м для бревен диаметром 16 см, 50 000 куб. м для бревен диаметром 22 см и т.д.;

2) алгоритмы оптимизации – рассчитывают максимальный экономический эффект. Например, для партии сырья объемом 100 000 куб. м экономический эффект составляет 172 730 тыс. руб.

3) системы мониторинга – предупреждают о возможных сбоях оборудования. Например, температурный датчик генерирует сигнал тревоги при нагреве режущего инструмента выше 80°C.

На основе данных из таблиц, представленных в пункте 2.4, распределение сырья производится следующим образом:

– бревна диаметром 16 см (20 000 куб. м) обрабатываются только на оборудовании №1;

– бревна диаметром 22 см (50 000 куб. м) – только на оборудовании №2;

–бревна диаметром 28 см (20 000 куб. м) и 32 см (10 000 куб. м) – только на оборудовании №3.

Экономический эффект для бревен диаметром 16 см стоимость сырья составляет 24 035 тыс. руб., что на 20% выше исходной цены, а для бревен диаметром 32 см стоимость сырья увеличивается на 73%, достигая 17 273 тыс. руб.

Таким образом, разработанная архитектура АСУ обеспечивает рациональное распределение пиловочного сырья между оборудованием, что позволяет достичь максимальной производительности и экономической эффективности. Например, для партии сырья объемом 100 000 м³ экономический эффект составил 172 730 тыс. руб. Такая система становится неотъемлемым инструментом для предприятий, стремящихся к лидерству в своей отрасли.

На основе предоставленной выше информации и теоретического описания, разработали алгоритм программы для автоматизации управления лесопильным оборудованием. Алгоритм будет включать шаги для расчета оптимального распределения сырья между оборудованием и максимизации экономического эффекта.

Алгоритм программы состоит:

1. Ввод данных

Программа начинается с загрузки входных данных. Эти данные могут быть либо жестко закодированы в программе, либо введены пользователем через графический интерфейс (GUI).

Шаг 1.1. Размерные группы сырья

Определить количество размерных групп n .

Для каждой группы задать:

Диаметр бревен (d_i).

Долю в общем объеме сырья (d_i), где $\sum_{i=1}^n d_i = 1$.

Шаг 1.2. Характеристики оборудования

Определить количество типов оборудования m .

Для каждого типа оборудования задать:

Капитальные затраты (I_0).

Эксплуатационные затраты (CF).

Срок службы (T).

Годовую производительность (Π_{ij}) для каждой размерной группы.

Выход пиломатериалов (r_{ij}) для каждой размерной группы.

Шаг 1.3. Общий объем сырья

Задать общий объем сырья Q (куб. м).

Шаг 1.4. Цена пиломатериалов

Задать цену пиломатериалов ($P_{ПМ}$) в руб./куб. м.

2. Подготовка данных для оптимизации

Программа преобразует входные данные в формат, подходящий для решения задачи линейного программирования.

Шаг 2.1. Расчет эквивалентного аннуитета. Для каждого типа оборудования рассчитать эквивалентный аннуитет (EA_j) по формуле (1):

$$EA_j = I_0 \cdot \frac{k \cdot (1+k)^T}{(1+k)^T - 1} + CF \quad (1)$$

где I_0 – капитальные затраты на оборудование (тыс. руб.),

k – ставка дисконтирования (например, 10% или 0,10),

T – срок службы оборудования (лет),

CF – эксплуатационные затраты (тыс. руб./год).

Шаг 2.2. Формирование переменных. Обозначить переменные x_{ij} – доли сырья из группы i , распиливаемого на оборудовании типа j . Количество переменных равно $n \times m$.

3. Формулировка целевой функции

Целевая функция максимизирует экономический эффект от использования сырья по формуле (2):

$$\Theta = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \left(\Pi_{ij} \cdot x_{ij} \cdot r_{ij} \cdot P_{\text{ПМ}} - EA_j \cdot \sum_{i=1}^n x_{ij} \right) \quad (2)$$

где $P_{\text{ПМ}}$ – цена пиломатериалов (руб./куб. м),

EA_j – эквивалентный аннуитет для оборудования типа j (тыс. руб./год).

K_{ij} – количество времени работы оборудования ij при распиловке сырья из группы i , лет,

$P_{\text{ПМ}}$ – стоимость 1 м³ пиломатериалов, тыс. руб.;

$P_{\text{ПЛ}}$ – стоимость 1 куб. м пиловочника, тыс. руб.;

Q – объём партии сырья, м³.

Программа преобразует эту функцию в минимизируемую форму для использования в библиотеке `scipy.optimize.linprog`:

Минимизировать: – Θ

4. Формулировка ограничений

Программа учитывает следующие ограничения:

Ограничение 1. Распределение сырья. Для каждой размерной группы i суммарная доля сырья, распиливаемого на всех типах оборудования, должна быть равна доле этой группы в общем объеме сырья по формуле (3):

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} = d_i, \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (3)$$

Ограничение 2. Производственные ограничения. Объем сырья, распиливаемого на каждом типе оборудования, не должен превышать его годовую производительность по формуле (4):

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} \cdot Q \leq \Pi_{ij}, \quad \forall j = 1, \dots, m \quad (4)$$

Ограничение 3. Неотрицательность переменных. Все переменные x_{ij} должны быть неотрицательными:

$$x_{ij} \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, n, \quad \forall j = 1, \dots, m$$

5. Решение задачи оптимизации

Программа использует метод линейного программирования для решения задачи. Шаги:

Шаг 5.1. Преобразование данных. Преобразовать целевую функцию и ограничения в матричный формат, подходящий для `scipy.optimize.linprog`.

Шаг 5.2. Вызов оптимизатора. Использовать функцию `linprog` для поиска оптимального решения:

```
result = linprog(c, A_eq=A_eq, b_eq=b_eq, bounds=bounds, method='highs')
```

где c – коэффициенты целевой функции,

A_{eq} и b_{eq} – матрица и вектор для равенств,

$bounds$ – границы для переменных.

6. Анализ результатов

Программа анализирует результаты оптимизации:

Шаг 6.1. Проверка успешности. Если решение найдено успешно (`result.success = True`):

Вывести оптимальное распределение сырья (x_{ij}).

Рассчитать максимальный экономический эффект (Э).

Если решение не найдено:

Вывести сообщение об ошибке.

Шаг 6.2. Интерпретация результатов

Определить, какое оборудование должно использоваться для каждой размерной группы.

Рассчитать стоимость сырья для каждой группы (дифференцированные цены).

7. Вывод результатов

Программа выводит результаты в удобном для пользователя формате:

Через консоль или графический интерфейс (GUI).

В виде таблицы с распределением сырья и экономическими показателями.

Пример работы алгоритма

Ввод данных:

Размерные группы: диаметры 16, 22, 28, 32 см с долями 20%, 50%, 20%, 10%.

Три типа оборудования с характеристиками (производительность, выход пиломатериалов, затраты).

Расчет эквивалентного аннуитета:

Для оборудования №1: $EA_1 = 7094$ тыс. руб./год.

Формулировка целевой функции и ограничений:

Целевая функция: максимизация экономического эффекта.

Ограничения: распределение сырья, производственные ограничения.

Решение задачи:

Программа находит оптимальное распределение сырья.

Вывод результатов:

Оптимальное распределение:

Группа 1: только на оборудовании №1.

Группа 2: только на оборудовании №2.

Группы 3 и 4: только на оборудовании №3.

Максимальный экономический эффект: $\Theta = X$ тыс. руб.

Таким образом, алгоритм программы позволяет эффективно решать задачу распределения пиловочного сырья между различными типами оборудования. Он основан на методологии линейного программирования и учитывает все ключевые параметры производства.

Список литературы

1. Кантиева, Е.В. Технология лесопильно–деревообрабатывающих производств: учебное пособие / Е.В. Кантиева, А.А. Мещерякова / М–во образования и науки Рос. Федерации, Фед. гос. бюджет. образоват. учреждение высш. образования "Воронеж. гос. лесотехн. ун–т им. Г. Ф. Морозова". – Воронеж, 2016. – 318 с. – eLIBRARY. – ЭБС ВГЛТУ.

2. Тамби, А.А. Обоснование необходимости внедрения процессов комплексного использования древесины на лесопильных предприятиях / А.А. Тамби, С.А. Угрюмов, А.Р. Бирман [и др.] // Системы. Методы. Технологии. 2020. № 2 (46). – С. 47–54.

3. Усольцев, О.А. Показатели эффективности лесопильного производства / О.А. Усольцев, В.В. Огурцов, Е.В. Каргина [и др.]// В сборнике: Лесной и химический комплексы – проблемы и решения. Сборник статей по материалам Всероссийской научно–практической конференции. В 2–х томах. 2016. – С. 135–137.

4. Мещерякова, А.А. Проектные решения по совершенствованию средств автоматизации лесопильного цеха [Текст] / А. А. Мещерякова, Ю. А. Пяткова // Современные ресурсосберегающие технологии и технические средства лесного комплекса : материалы Всероссийской научно-практической конференции, Воронеж, 25-26 ноября 2021 г. / отв. ред. И. В. Четверикова ; М-во науки и высшего образования РФ, ФГБОУ ВО «ВГЛТУ». – Воронеж, 2021. – С. 94-98с.- eLIBRARY.

References

1. Kantieva, E.V. Technology of sawmilling and woodworking industries: a textbook / E.V. Kantieva, A.A. Meshcheryakova / Ministry of Education and Science of the Russian Federation, Federal state budget educational institution of higher education "Voronezh State Forestry University named after G.F. Morozov". - Voronezh, 2016. - 318 p. - eLIBRARY. - Electronic Library System of VSFLTU
2. Tambi, A.A. Justification of the need to introduce processes of integrated use of wood at sawmills / A.A. Tambi, S.A. Ugryumov, A.R. Birman [et al.] // Systems. Methods. Technologies. 2020. No. 2 (46). - P. 47-54.
3. Usoltsev, O.A. Performance indicators of sawmill production / O.A. Usoltsev, V.V. Ogurtsov, E.V. Kargina [et al.] // In the collection: Forest and chemical complexes – problems and solutions. Collection of articles based on the materials of the All-Russian scientific and practical conference. In 2 volumes. 2016. – P. 135–137.
4. Meshcheryakova, A.A. Design solutions for improving automation tools of the sawmill shop [Text] / A. A. Meshcheryakova, Yu. A. Pyatkova // Modern resource-saving technologies and technical means of the forest complex : materials of the All-Russian Scientific and Practical Conference, Voronezh, November 25-26, 2021 / ed. by I. V. Chetverikov; Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, VGLTU. – Voronezh, 2021. – pp. 94-98.- eLibrary.

DOI: 10.58168/OpEq2025_139-145

УДК 630*36

**ОЦЕНКА РАБОТЫ ХАРВЕСТЕРА НА БАЗЕ ГУСЕНИЧНОГО
ЭКСКАВАТОРА SANY SY245F В ЛЕТНЕМ И ЗИМНЕМ
ТЕМПЕРАТУРНЫХ РЕЖИМАХ**

**EVALUATION OF SANY SY245F CRAWLER EXCAVATOR HARVESTER
OPERATION IN SUMMER AND WINTER TEMPERATURE CONDITIONS**

Паутов Даниил Алексеевич

Студент Петрозаводского государственного университета,

г. Петрозаводск, Россия

Кузнецов Алексей Владимирович

доктор технических наук, доцент, профессор кафедры технологии лесного
комплекса и ландшафтной архитектуры ПетрГУ, г. Петрозаводск, Россия

Pautov Daniil Alekseevich

Student at Petrozavodsk State University, Petrozavodsk, Russia

Kuznetsov Aleksey Vladimirovich

Doctor of Technical Sciences, Associate Professor, Professor of the Department of
Forestry Technology and Landscape Architecture of PetrSU, Petrozavodsk, Russia

Аннотация. В условиях санкций, лесозаготовительные компании столкнулись с проблематикой обновления и ремонта парка лесозаготовительной техники. В работе приведены результаты исследования работы харвестера на базе гусеничного экскаватора SANY SY245F с харвестерной головкой WARATAN H480C в условиях АО «КЛПХ» (Республика Карелия) в зимний и летний периоды времени года. Анализ показал, что машины подобного класса можно, с учетом особенностей их конструкции и эксплуатации, рекомендовать к использованию на предприятиях лесного комплекса России в условиях сохранения санкций.

Abstract. In the conditions of sanctions, logging companies faced the problem of renewal and repair of the fleet of logging equipment. The paper presents the results of the study of harvester operation on the basis of crawler excavator SANY SY245F with harvester head WARATAH H480C in the conditions of JSC “KLPH” (Republic of Karelia) in winter and summer seasons. The analysis has shown that machines of this class can be recommended for use at the enterprises of the forestry complex of Russia under the conditions of sanctions preservation, taking into account the features of their design and operation.

Ключевые слова: харвестер на базе гусеничного экскаватора, эффективность, производительность, зимний и летний температурный режим.

Keywords: harvester based on crawler excavator, efficiency, productivity, winter and summer temperature conditions.

В настоящее время, в условиях санкций, лесозаготовительные компании столкнулись с проблематикой обновления и ремонта парка лесозаготовительной техники [1]. На рынке, в основном, представлена продукция белорусской компании «АМКОДОР» [2], существует возможность приобретения поддержанных машин «традиционных» производителей John Deere, Ponsse, Komatsu и т.д., так же есть возможность приобрести технику по параллельному импорту [1]. Стоит отметить ограниченное сохранение производства, в основном гусеничных машин отечественного производства, кроме этого, предпринимаются усилия по организации производства колесных форвардеров и харвестерных головок [1, 3-5]. В то же время, ограниченный мелкосерийный объем выпуска этой техники, в силу разных причин (невысокое значение коэффициента технической готовности, отсутствие компетенций в производстве высокотехнологичного оборудования для сортиментной заготовки и т.д.), не в состоянии удовлетворить спрос потребителей.

В этих условиях, на наш рынок вышла техника китайского производства. В основном это харвестеры на базе гусеничных экскаваторов (Xuvol, LiuGong,

SANY и т.д.). Появилась информация об опытной эксплуатации форвардера китайского производства и совместном производстве технологического оборудования [6], в частности, харвестерных головок [7].

В рамках вышеизложенного, проведены исследования работы харвестера на базе гусеничного экскаватора SANY SY245F с харвестерной головкой WARATAN H480C в условиях АО «КЛПХ» (Республика Карелия) [8, 9]. Хронометражные наблюдения проводились в зимний и летний периоды времени года.

Средний объём хлыста ($V_{хл}$) в летний период времени равен 0,29 м³, зимой – 0,22 м³. Лето (июнь), дневная средняя температура воздуха составляла + 20 градусов Цельсия, ночью – +11. Лесосека расположена в Кондопожском центральном лесничестве, Лижемском урочище, 132 квартал, 38 выдел. Вид рубки: сплошная; породный состав: 8Е2Б+С,Ос; средний запас древесины – 169 м³/га.

Зимой наблюдения проводились в феврале, средняя температура днем составляла: – 8 градусов Цельсия, ночью, соответственно: – 13. Лесосека расположена в Кондопожском центральном лесничестве, Сандальском урочище, 109 квартал, 2,7 выдела. Вид рубки: сплошная; породный состав: 5Е4Б1Ос+С+Ос; средний запас древесины – 160 м³/га.

На основе хронометражных наблюдений проведен расчет сменной производительности гусеничного харвестера согласно методике, представленной в работах [10, 11]. Результаты анализа среднего значения производительности представлены на рис. 1.

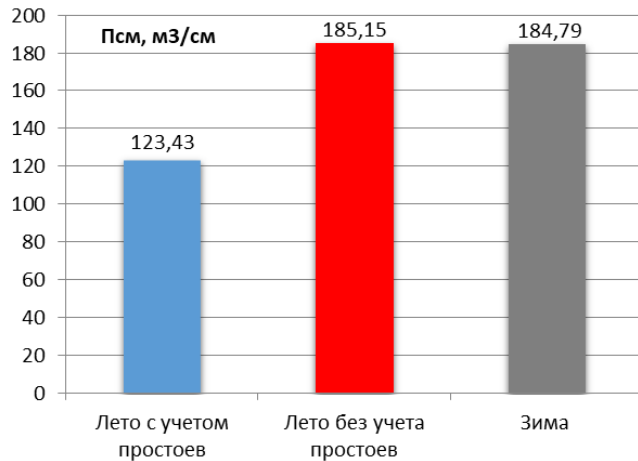


Рисунок 1. Сменная производительность харвестера на базе гусеничного экскаватора SANY SY245F в летнее и зимнее время года

Анализ показал, что средняя сменная производительность ($P_{см}$) харвестера на базе гусеничного экскаватора SANY SY245F зимой превышает $P_{см}$ летом в 1,5 раза, несмотря на то, что $V_{хл}$ летом выше. Это обусловлено тем, что летом из-за перегрева масла в гидравлической системе оператор вынужден был делать перерывы в работе для его охлаждения. В результате, это существенно сказалось на производительности харвестера.

Оценка работы машины в летнее и зимнее время года показала, что при нивелировании этих простоев $P_{см}$ харвестера будет практически идентична производительности зимой, несмотря на то, что летом средний $V_{хл}$ выше в 1,32 раза объема хлыста зимой. Это может быть обусловлено опытом оператора или другими субъективными факторами и требует проведения дальнейших исследований.

Анализ показал, что в условиях проведенного исследования для повышения эффективности харвестера на базе гусеничного экскаватора SANY SY245F в безморозный период времени года необходимо решить общеизвестную проблему перегрева масла в гидравлической системе: оптимизировать систему охлаждения гидравлической системы в процессе предпродажной подготовки или непосредственно на предприятии (установка дополнительных вентиляторов и

радиаторов охлаждения гидросистемы, организация пассивного охлаждения, ежедневная чистка элементов охлаждающей системы и улучшение защиты сот радиатора от опилок и мусора). Необходимо отметить, что подобная проблематика свойственна всем гусеничным харвестерам на базе экскаватора, и крупные компании, занимающиеся продажей подобной техники, как правило, проводят ее подготовку для работы в сложных природно-производственных условиях.

В работе [12] отмечаются и другие особенности харвестера на базе гусеничного экскаватора SANY SY245F: повышенный расход топлива, недостаточная защита остекления кабины, а также проблемы с запасными частями. В то же время, простота конструкции базовой машины, достаточно хорошая производительность и доступность, позволяют рекомендовать использование этой машины и подобных харвестеров на базе экскаваторов, с учетом особенностей их конструкции и эксплуатации, на предприятиях лесного комплекса России в условиях сохранения санкций.

Список литературы

1. Кузнецов А.В. Анализ производства лесозаготовительных машин в России / А.В. Кузнецов, О.Н. Галактионов // Инженерный вестник дона. Ростов-на-Дону, 2023. С.712-722.
2. Харвестеры и форвардеры // ОАО «АМКОДОР». URL: amkodor.by/catalog/ (дата обращения: 25.02.2025).
3. Форвардер МТБ-18 // Производство России. URL: productcenter.ru/products/76868/forvardier-mtb-18/ (дата обращения: 25.02.2025).
4. Гусеничный трактор ТСН-4 // Алтайский тракторный завод «ГРАНД». URL: tt-4.ru/traktor/ (дата обращения: 25.02.2025).
5. Форвардер Тром 20 // Тром. URL: trom20.ru/ (дата обращения: 25.02.2025).

6. Продукция // XUVOL. URL: ru.xuvol.com/Products_index.html_(дата обращения: 25.02.2025).

7. Харвестерная головка Т600 – первая в России реальная альтернатива европейским брендам // Журнал «ЛПК Сибири». URL: lpk-sibiri.ru/logging/harvester-heads/harvesternaya-golovka-t600-pervaya-v-rossii-realnaya-alternativa-evropeyskim-brendam/?ysclid=lfnw3hgino292636735_____(дата обращения: 25.02.2025).

8. ООО «Карелия Палп». URL: karjalapulp.com/_(дата обращения: 25.02.2025).

9. АО «Кондопожское лесопромышленное хозяйство» (КЛПХ). URL: klpkh.com/_(дата обращения: 25.02.2025).

10. Шегельман И.Р., Скрышник В.И., Питухин А.В., Галактионов О.Н. Производство лесосечных работ: Технология и техника. Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2015. 366 с.

11. Герасимов Ю.Ю., Сибиряков К.Н., Мошков С.Л., Вяльккю Э., Карвинен С. Расчет эксплуатационных затрат лесосечных машин. Йёнсуу: НИИ леса Финляндии, 2009. 46 с.

12. Кузнецов А.В. Сравнительный анализ эффективности харвестеров зарубежного производства / А.В. Кузнецов, А.А. Гайда // Resources and Technology. Петрозаводск, 2024. Т. 21, № 1. С.100-112.

References

1. Kuznetsov A. V., Galaktionov O. N. Analysis of the production of forestry machines in Russia // Engineering Bulletin of the Don. Rostov-on-Don, 2023, pp. 712-722.

2. Harvesters and forwarders. OJSC AMKODOR. Available at: amkodor.by/catalog/ (date accessed: 25.02.2025).

3. Forwarder MTB-18. Production of Russia. Available at: productcenter.ru/products/76868/forwardier-mtb-18 (date accessed: 25.02.2025).
4. Tracked tractor TSN-4. Altai Tractor Plant “GRAND”. Available at: tt-4.ru/traktor/ (date accessed: 25.02.2025).
5. Forwarder Trom 20 // Trom. Available at: trom20.ru/ (date accessed: 25.02.2025).
6. Products // XUVOL. Available at: ru.xuvol.com/Products_index.html (date accessed: 25.02.2025).
7. Harvester head T600 — the first real alternative to European brands in Russia. Journal «LPK Siberia». Available at: lpk-sibiri.ru/logging/harvester-heads/harvesternayagolovka-t600-pervaya-v-rossii-realnaya-alternativa-evropeyskim-brendam/?ysclid=1fnw3hgino-292636735 (date accessed: 25.02.2025).
8. Karelia Pulp LLC. Available at: karjalapulp.com/ (date accessed: 25.02.2025).
9. JSC «Kondopoga timber industry» (KLPH). Available at: klpkh.com/ (date accessed: 25.02.2025).
10. Shegelman I. R., Skrypnik V. I., Pitukhin A. V., Galaktionov O. N. Production of logging works: Technology and equipment. Petrozavodsk, PetrSU Publishing House, 2015. 366 p.
11. Gerasimov Yu. Yu., Sibiryakov K. N., Moshkov S. L., Välkky E., Karvinen S. Calculation of operating costs of logging machines. Joensuu, Finnish Forest Research Institute, 2009. 46 p.
12. Kuznetsov, A.V., Gaida A.A. Comparative analysis of foreign-made harvesters efficiency // Resources and Technology. Petrozavodsk, 2024. VOL. 21, № 1. pp.100-112.

DOI: 10.58168/OpEq2025_146-153

УДК 003.26

ЧИСЛА БЕРНУЛЛИ В КРИПТОГРАФИИ
BERNULLI NUMBERS IN CRYPTOGRAPHY

Полтарабатько Роман Сергеевич

студент 4 курса факультета прикладной математики, информатики и механики
ВГУ, г. Воронеж, Россия

Poltarabatko Roman Sergeevich

4th year student of the Faculty of Applied Mathematics, Computer Science and
Mechanics of VSU, Voronezh, Russia

Аннотация. В данной статье рассматривается метод шифрования, основанный на числах Бернулли. Приводится математическое описание метода, включая рекуррентные соотношения для генерации чисел Бернулли, а также алгоритм их применения в криптографическом шифре. Реализован алгоритм преобразования текста в числовую последовательность с последующим шифрованием и расшифрованием на основе арифметических операций с числами Бернулли.

Abstract. This paper presents an encryption method based on Bernoulli numbers. A mathematical description of the method is given, including recurrence relations for generating Bernoulli numbers and an algorithm for their application in a cryptographic cipher. The algorithm for converting text into a numerical sequence is implemented, followed by encryption and decryption based on arithmetic operations with Bernoulli numbers.

Ключевые слова: шифрование, числа Бернулли, криптография, безопасность данных, рекуррентные соотношения.

Keywords: encryption, Bernoulli numbers, cryptography, data security, recurrence relations.

Числа Бернулли — это последовательность рациональных чисел, возникающих в ряде Тейлора функции $\frac{x}{e^x-1}$. Они обозначаются как B_n и используются, например, при вычислении значений сумм степеней натуральных чисел, в разложениях и аналитических выражениях.

Числа Бернулли определяются рекуррентным соотношением

$$B_0 = 1, \quad B_n = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k+1} B_{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Первые числа Бернулли:

$$B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_3 = 0, B_4 = -\frac{1}{30}, \dots$$

Отметим, что нечётные индексы (кроме первого) дают нулевые значения.

Числа Бернулли представляют собой важную и широко изучаемую последовательность в математике, которая обладает уникальными свойствами и играет значительную роль в различных областях науки, таких как теория чисел, анализ, комбинаторика и криптография.

Одной из ключевых особенностей чисел Бернулли является их подчинение строго определённым рекуррентным соотношениям. Эти соотношения обеспечивают возможность последовательного вычисления чисел Бернулли, опираясь на значения, которые были найдены на предыдущих этапах. Такой подход делает процесс их вычисления систематизированным и предсказуемым, что особенно важно при их применении в задачах с высокой степенью вычислительной сложности.

Основное рекуррентное соотношение для чисел Бернулли [1] имеет следующий вид:

$$\sum_{k=0}^n \binom{m+1}{k} B_k = 0 \quad (1)$$

где $\binom{m+1}{k} = \frac{(m+1)!}{k!(m+1-k)!}$ — биномиальный коэффициент, описывающий количество способов выбрать k элементов из $m+1$ элементов. Свойства этого соотношения:

1. $B_0 = 1$;
2. $B_1 = -\frac{1}{2}$;
3. $B_m = 0$ для всех нечетных $m > 1$.

Используя это рекуррентное соотношение, можно вычислить B_m для любого m , зная значения для меньших индексов. Например, для $m = 2$:

$$\binom{3}{0} B_0 + \binom{3}{1} B_1 + \binom{3}{2} B_2 + \binom{3}{3} B_3 = 0$$

Подставляя известные значения $B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_3 = 0$, можно найти B_2 .

Числа Бернулли могут быть использованы для генерации матриц, применяемых в многослойных системах шифрования.

Матрица Бернулли B_n [2] формируется на основе чисел Бернулли и используется для преобразования данных. Она имеет следующий вид (2):

$$B_n = \begin{pmatrix} B_{n-1} & B_n \\ B_n & B_{n+1} \end{pmatrix} \quad (2)$$

При $n = 1$ матрица B_1 имеет следующий вид (3):

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \quad (3)$$

Для $n = 2$ матрица расширяется, добавляя новые элементы (4):

$$B_2 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Шифрование данных играет ключевую роль в обеспечении безопасности информации. Использование чисел Бернулли в криптографии позволяет создавать ключи со сложной структурой, что затрудняет их предсказание. Принцип шифрования заключается в преобразовании символов текста в числовые представления с последующим модифицированием с использованием чисел Бернулли [3].

Метод шифрования основан на поэтапном преобразовании исходного текста в числовую форму, его разбиении на блоки фиксированной длины и последовательном применении математических операций для получения зашифрованного сообщения. В процессе шифрования используется матричная трансформация, ключевым элементом которой является матрица B_2 . Данная матрица строится с использованием чисел Бернулли и обладает особыми свойствами, обеспечивающими надежность преобразований. В зависимости от значений битов ключа шифрования матрица B_2 применяется в различных степенях к каждому блоку данных, что усложняет анализ зашифрованного текста и повышает криптографическую стойкость метода.

Основные этапы алгоритма:

1. Отображение символов в числовой формат

Каждому символу алфавита (включая пробелы и знаки препинания) сопоставляется уникальное число. Это позволяет представить текст в виде числового вектора.

2. Формирование матрицы данных

Числовая последовательность разбивается на блоки фиксированной длины, которые формируют матрицу q_0 , подлежащую шифрованию.

3. Генерация ключа шифрования

Ключ задается в виде бинарной последовательности (например, «10101»), где каждая цифра влияет на применяемые матричные преобразования. Для каждого бита ключа выбирается степень, в которую будет возводиться матрица B_2 . Эта степень определяется по формуле (5):

$$exp = \left(\frac{i + 1}{2} \right) + 1 \quad (5)$$

где i – индекс соответствующего бита.

4. Матричные преобразования

В зависимости от значения бита (например, «1» или «0») к исходной матрице данных q_0 применяется матричное преобразование с B_2^{exp} . Если бит равен «1», то происходит умножение текущего состояния данных на B_2^{exp} , что обозначается как обновление ветки `branch1`. Если бит равен «0», то применяется альтернативное ветвление (`branch0`), при этом часто используется результат, полученный ранее при обработке битов «1». Такой механизм изменения степени матричного преобразования в зависимости от ключа позволяет добиться дополнительного уровня нелинейности и защищенности шифра.

5. Формирование зашифрованного сообщения

Итоговая матрица содержит зашифрованные данные, которые впоследствии могут быть дешифрованы при наличии правильного ключа.

6. Дешифрование

Для восстановления исходного сообщения применяется обратный процесс. Зашифрованная матрица, полученная в результате последовательного применения степеней B_2 , умножается на обратные матрицы B_2^{-exp} в порядке, обратном порядку шифрования. Это позволяет отменить эффект каждого преобразования, восстановив исходное числовое представление данных.

Рассмотрим пример шифрования слова «привет», ключ «101».

1. Пусть алфавит начинается с «а» = 0, «б» = 1, ..., «п» = 16, ..., «я» = 32. Тогда: «п» = 16, «р» = 17, «и» = 8, «в» = 2, «е» = 5, «т» = 19. Получаем числовой вектор $V = (16, 17, 9, 2, 5, 19)$.

2. Выберем размер блока $k = 3$, тогда вектор разбивается на два блока:

$$q_0 = \begin{pmatrix} 16 & 17 & 9 \\ 2 & 5 & 19 \end{pmatrix}$$

3. Ключ шифрования — трёхбитный. Для каждого бита по формуле $\text{exp} = \left(\frac{i+1}{2}\right) + 1$ определим степень: $i = 0 \rightarrow \text{exp} = 1$, $i = 1 \rightarrow \text{exp} = 2$, $i = 2 \rightarrow \text{exp} = 2$.

4. Начинаем шифрование:

- **Шаг 1:** бит = 1, $\text{exp} = 1$

branch_1 инициализируется: $\text{branch}_1 = q_0 * B_2^1$

$$\text{branch}_1 = \begin{pmatrix} 16 & 17 & 9 \\ 2 & 5 & 19 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{15}{2} & -\frac{31}{6} & 9 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & 19 \end{pmatrix}$$

- **Шаг 2:** бит = 0, $\text{exp} = 2$

branch_0 инициализируется: $\text{branch}_0 = q_0 * B_2^2$

$$B_2^2 = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{7}{12} & 0 \\ -\frac{7}{12} & \frac{5}{18} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{branch}_0 = \begin{pmatrix} 16 & 17 & 9 \\ 2 & 5 & 19 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{7}{12} & 0 \\ -\frac{7}{12} & \frac{5}{18} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{121}{12} & -\frac{83}{18} & 9 \\ -\frac{5}{12} & \frac{2}{9} & 19 \end{pmatrix}$$

- **Шаг 3:** бит = 1, exp = 2

$branch_1$ обновляется: $branch_1 = branch_1 * B_2^2$

$$branch_1 = \begin{pmatrix} \frac{15}{2} & -\frac{31}{6} & 9 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & 19 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{7}{12} & 0 \\ -\frac{7}{12} & \frac{5}{18} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{223}{18} & -\frac{1255}{216} & 9 \\ -\frac{19}{36} & \frac{53}{216} & 19 \end{pmatrix}$$

Итоговое зашифрованное сообщение – это матрица $branch_1$.

5. Теперь расшифруем сообщение. Для этого найдем обратные матрицы для B_2^2 и B_2^1 :

$$B_2^{-2} = \begin{pmatrix} 40 & 84 & 0 \\ 84 & 180 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_2^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -6 & 0 \\ -6 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Далее, умножаем матрицу $branch_1$ сначала на B_2^{-2} :

$$\begin{pmatrix} \frac{223}{18} & -\frac{1255}{216} & 9 \\ \frac{19}{36} & \frac{53}{216} & 19 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 40 & 84 & 0 \\ 84 & 180 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{15}{2} & -\frac{31}{6} & 9 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & 19 \end{pmatrix}$$

Затем полученную матрицу умножаем на B_2^{-1} :

$$\begin{pmatrix} \frac{15}{2} & -\frac{31}{6} & 9 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & 19 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -2 & -6 & 0 \\ -6 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 17 & 9 \\ 2 & 5 & 19 \end{pmatrix}$$

Это и есть исходная матрица q_0 .

Использование чисел Бернулли в криптографии демонстрирует потенциал для создания алгоритмов, обладающих высокой степенью защиты благодаря сложности их структуры. Они могут быть использованы для генерации криптографических ключей, что затрудняет их анализ и взлом. В перспективе данный метод может быть усовершенствован и адаптирован для различных приложений в области защиты информации.

Список литературы

1. Абрамовиц, М., Стиган, И. Справочник по математическим функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. Издательство правительства США, 1972, стр. 824–825.

2. Мишра К. Л. П., Чандрашекхран Н., «Теория информатики» (3-е издание), PHI Learning, (2014).

3. Навалакхе, Р., Атре, Х. Криптографические алгоритмы с использованием конечного автомата, чисел Бернулли и чисел Люка. Журнал математики и математических наук Юго-Восточной Азии, Том 17, № 3, 2021, стр. 17-28.

References

1. Abramowitz, M., Stegun, I.A. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. US Government Printing Office, 1972, pp. 824–825.

2. Mishra K. L. P., Chandrashekhra N., Theory of Computer Science, (3rd Edition) PHI Learning, (2014).

3. Navalakhe, R., Atre, H. Cryptographic Algorithms Using Finite State Machine, Bernoulli and Lucas Numbers. South East Asian J. of Mathematics and Mathematical Sciences, Vol. 17, No. 3, 2021, pp. 17-28.

DOI: 10.58168/OpEq2025_154-165

УДК 517.98

**КОМБИНИРОВАННОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДВУХАГРЕГАТНЫМ
ВЕСОВЫМ ДОЗАТОРОМ НЕПРЕРЫВНОГО ДЕЙСТВИЯ**
COMBINED TWO-UNIT WEIGHT CONTINUOUS DOSING OF BULK
MATERIALS

Поляков Сергей Иванович

кандидат технических наук, доцент,

доцент кафедры автоматизации производственных процессов

ВГЛТУ, г. Воронеж, Россия

Polyakov Sergey Ivanovich

PhD (Engineering), Associate professor, Associate professor of the Department of Industrial Process Automation, Voronezh State University of Forestry and Technologies named after G.F. Morozov, Voronezh, Russia

Аннотация. Статья посвящена исследованию проблемы комбинированного двухагрегатного непрерывного дозирования сыпучих материалов с целью создания автоматизированной системы управления процессом весового дозирования.

Abstract. The article is devoted to the study of the problem of combined two-unit continuous dosing of bulk materials in order to create an automated control system for the weighing dosing process.

Ключевые слова: весовое дозирование, точность, автоматическое регулирование, управление, смеси, структурная схема.

Keywords: weight dosing, accuracy, automatic regulation, control, mixtures, block diagram.

Производство смесей высокого качества в различных отраслях промышленности при непрерывном дозировании исходных компонентов является приоритетной задачей по созданию передвижных и стационарных весодозирующих и смесительных установок. Причем вопросы автоматического управления непрерывным весовым дозированием и смешиванием компонентов при производстве смесей являются ключевыми.

Работа посвящена исследованию повышения точности весового непрерывного дозирования компонентов смесей и созданию АСУ дозированием.

При этом требовалось изучить особенности весового дозирования компонентов смесей как объекта управления и выработать проектные предложения для реализации автоматического непрерывного весового дозирования.

Исследование процесса непрерывного весового дозирования компонентов смесей с разработкой и созданием АСУ дозированием представляет важную научную и практическую проблему.

В работе решены следующие задачи:

- исследование процесса дозирования как объекта компьютерного управления;
- модернизация структуры управления взвешиванием на базе современных средств автоматического контроля и управления;
- выбор комплекса технических средств системы управления непрерывным весовым дозированием компонентов смесей;
- техническая реализация системы управления на основе использования рычажных весов, частотных преобразователей, а также контроллера, регулятора или промышленного компьютера.

Объект исследования являлись автоматические весовые дозаторы компонентов смесей. Предмет исследования – процесс непрерывного весового дозирования компонентов смесей. К научной новизне работы можно отнести

определение особенности управления процессом непрерывного весового дозирования.[1]

Проектная значимость, заключается в выборе комплекса технических средств автоматизации дозирования и на их основе создание автоматизированной тензометрической системы дозирования.

Работа имеет практическую ценность, заключающуюся в разработке системы управления весовым дозированием.

Результаты работы:

- определены особенности процесса весового дозирования и системы управления дозированием;

- выявлена и экспериментально подтверждена точность дозирования компонентов на реальном весовом оборудовании;

- получены проектные решения по модернизации участка автоматического дозирования компонентов;

- предложенная в работе система управления дозированием характеризуется сбором, анализом и оперативным управлением технологическим весовым оборудованием.

Апробация работы: основные положения докладывались на научно-технических конференциях, проводимых в разные годы в ВГЛТУ.

Работа состоит из трех основных частей, объединенных единой целью исследования вопросов автоматизации процесса непрерывного дозирования сыпучих материалов.

Анализ состояния научно-технических разработок в области автоматизации непрерывного весового дозирования сыпучих материалов передвижных и стационарных установок показал недостатки существующего весоизмерительного оборудования по точности дозирования.

В последнее время разработка и выбор комплекса технических средств автоматизации непрерывного дозирования материалов смесительных установок выполняется с тензометрической весоизмерительной системой.

На основе вышеизложенных знаний можно сделать заключение о результате проделанной работы. [2]

В дальнейшем будем рассматривать именно такой способ комбинированного управления дозатором, оснащенного ленточным питателем. Преимущества двухагрегатного комбинированного дозатора очевидны и заключаются в следующем:

- возможность варьирования в широком диапазоне расхода исходного компонента, поступающего на ленту грузоприемного весоизмерительного органа дозатора;

- возможность без существенной потери точности дозирования осуществлять подачу ленточным питателем неоднородного сыпучего материала различной структуры и гранулометрического состава;

- возможность создания простой конструкции дозатора на базе двух одностипных ленточных конвейеров, но осуществляющих различные функции – подачи и измерения насыпной массы материала;

- использование и распространение принципа комбинированного управления на дозирующие устройства непрерывного типа, различающиеся конструктивными особенностями.

С учетом сказанного, для реализации принципа комбинированного управления дозатором на практике, необходимо создание двухконтурного регулирования по параметрам насыпной массы материала на ленте и скорости движения самой ленты грузоприемного органа. Структурная схема двухагрегатного комбинированного весового дозатора, оснащенного средствами автоматизации: датчиками, регуляторами и исполнительными механизмами, изображена на рисунке 1.

Можно сделать промежуточный вывод о том, что для двухагрегатного комбинированного весового дозатора увеличение точности дозирования напрямую будет зависеть от совершенствования структуры и принципа комбинированного управления. Сигнал, пропорциональный насыпной массе

материала, перемножается с сигналом частоты вращения приемного конвейера, результат перемножения сравнивается с заданным расходом и обрабатывается регуляторами воздействием на приводы конвейера и питателя.

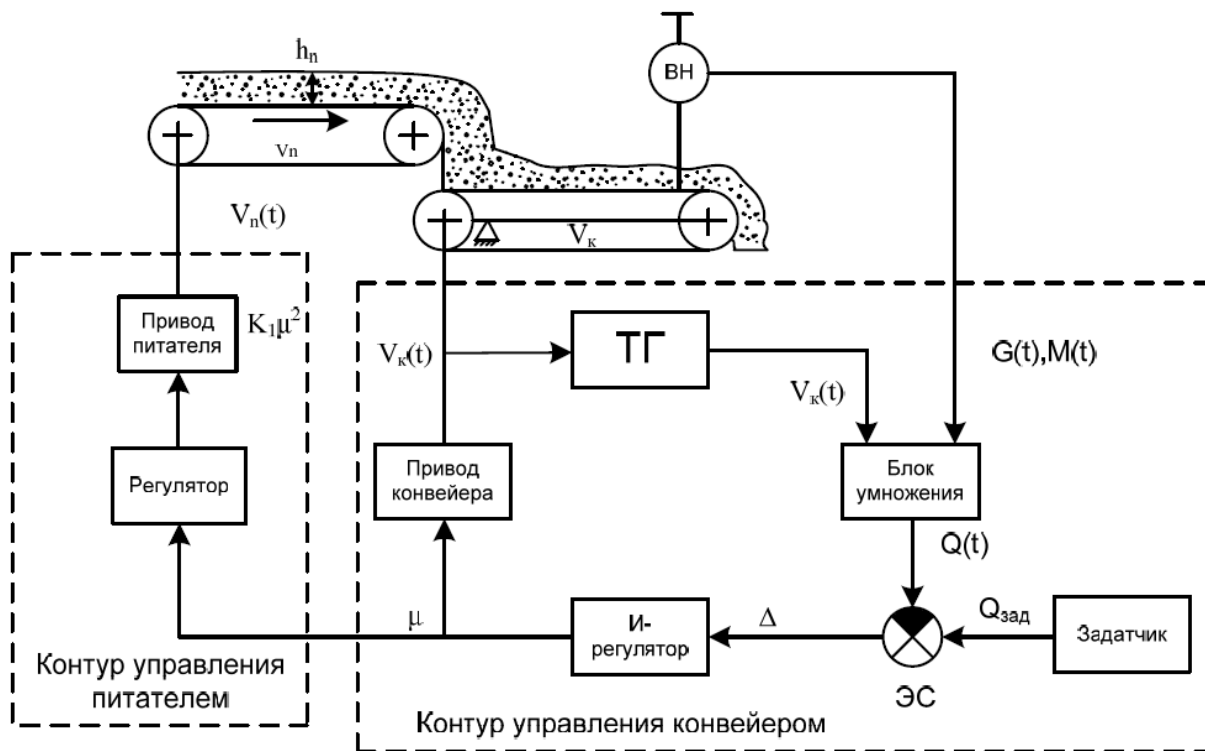


Рисунок 1 – Структурная схема двухагрегатного комбинированного весового дозатора

Основная цель изучения принципа управления двухагрегатного комбинированного весового дозатора заключается в обеспечении снижения динамической погрешности дозирования при практической реализации управления дозатором непрерывного действия.

С точки зрения управления дозатором необходимо определить основное возмущающее воздействие на него. Таким воздействием является величина рассогласования между заданным и текущим значением расхода материала. Устранить возникшее рассогласование возможно изменением насыпной массы материала со стороны ленточного питателя, так и изменением частоты вращения ленты грузового конвейера.

Особенность работы дозатора непрерывного действия заключается в том, что расход материала на транспортере можно представить за входную величину,

а вес материала за выходную величину. Также необходимо учесть, что грузовой конвейер – это звено чистого транспортного запаздывания, где материал в один и тот же момент времени приходит на транспортер и уходит с него.

В соответствии с рисунком 1 имеет место двухконтурное регулирование производительности дозатора. Первый контур выполняет стабилизацию частоты вращения грузового конвейера и одновременно стабилизацию расхода материала на ленте как функции двух переменных: насыпной массы материала, формируемой контуром управления питателем и скоростью вращения ленты грузового конвейера. Второй контур управления питателем имеет свой собственный регулятор, обеспечивающий стабилизацию подачи сыпучего материала на грузовую ленту.

В качестве датчика частоты вращения грузового конвейера использован тахогенератор, которым может служить генератор постоянного тока.

В качестве датчика веса (насыпной массы) в последнее время применяют тензометрические силовые измерители. После прохождения блока перемножения сформирован сигнал фактической производительности дозатора в данный момент времени для сравнения его с заданным значением производительности от задатчика.

Структурная схема управления комбинированным двухагрегатным дозатором представлена на рисунке 2.

В качестве датчика скорости, используется тахогенератор, которым является генератор переменного тока с последующим выпрямлением; датчиком массы служит сельсин, фиксирующий перемещение грузоприемного транспортера; в качестве регулятора используется стандартный регулятор.

Таким образом, система управления двухагрегатным дозатором поддерживает в заданных пределах скорость движения ленты транспортера и интенсивность подачи материала шнековым питателем из бункера сыпучего материала.

Весовые дозаторы непрерывного действия, являясь аналоговыми системами, представляют собой системы, легко поддающиеся расчету в динамике. Для подобных расчетов необходимо знание динамики основного элемента дозатора – грузоприемного органа, которым является короткий ленточный транспортер.

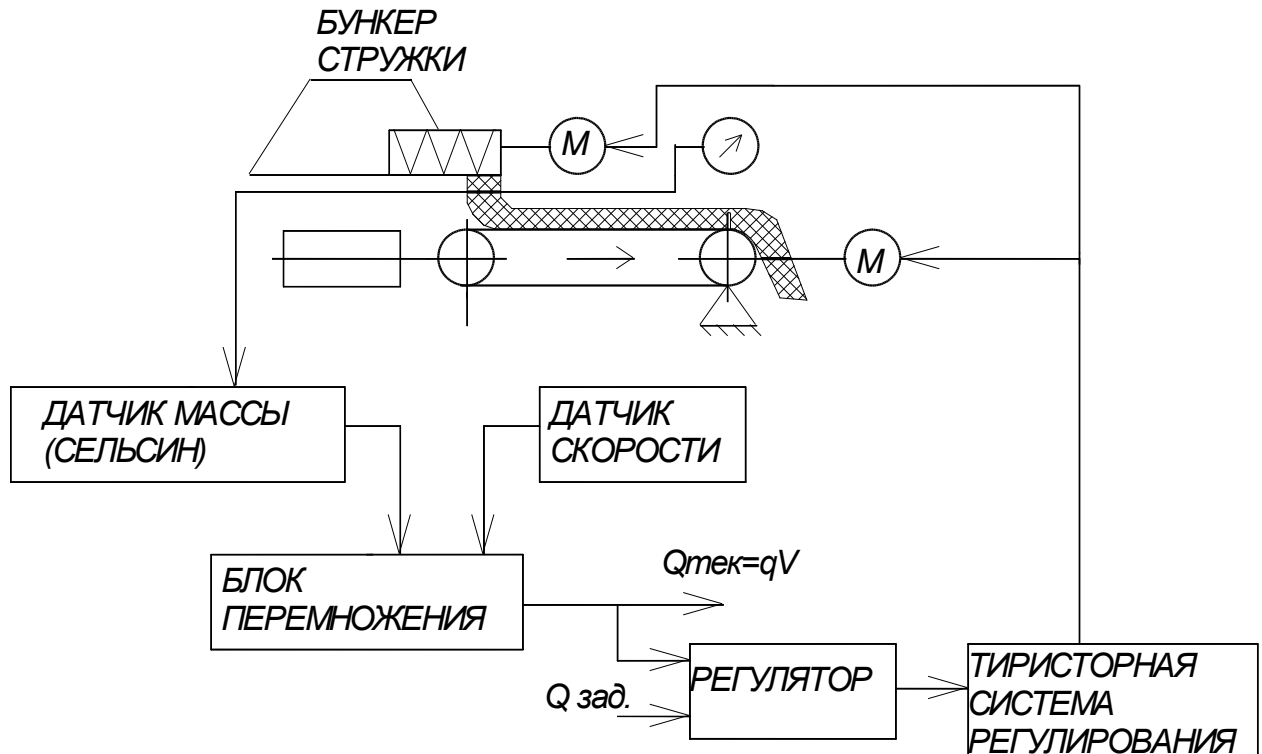


Рисунок 2 – Структурная схема автоматизации двухагрегатного дозатора

Применительно к рассмотренным структурным схемам автоматизации весовых дозаторов приведем математический аппарат, описывающий работу принципа комбинированного управления, связывающий в функциональной зависимости интенсивность подачи материала на ленту грузового конвейера и скорость ленты этого конвейера. Для этого воспользуемся структурными схемами двухагрегатных комбинированных весовых дозаторов и условными обозначениями сигналов физических параметров, приведенными на схемах в соответствии с рисунками 1 и 2.

Обеспечиваемая весовым дозатором производительность $Q_{доз}$ может быть вычислена по следующей формуле:

$$Q_{доз} = \gamma S_{кон} h_{кон} V_{кон},$$

где γ – насыпная масса сыпучего материала;

$S_{кон}$ – ширина ленты грузоприемного конвейера;

$V_{кон}$ – линейная скорость ленты грузоприемного конвейера;

$h_{кон}$ – высота сыпучего компонента на грузоприемном конвейере.

Если критически обосновать состав формулы, то при постоянстве насыпной массы дозируемого сыпучего компонента и ширины ленты грузового конвейера производительность дозатора $Q_{доз}$ будет зависеть от линейной скорости ленты и высоты сыпучего компонента на грузовом конвейере.

В случае если произойдет изменение насыпной массы компонента, то она может быть эквивалентно заменена высотой $h_{кон}$ сыпучего компонента на грузовом конвейере.

Рассмотрим вычисление производительности ленточного питателя по аналогичной выше формуле:

$$Q_{пит} = \gamma S_{пит} h_{пит} V_{пит},$$

где γ – насыпная масса компонента;

$S_{пит}$ – ширина ленты конвейера питателя;

$V_{пит}$ – линейная скорость ленты конвейера питателя;

$h_{пит}$ – высота сыпучего компонента на конвейере питателя.

Так как рассматривается работа дозатора, реализующего непрерывный принцип действия, то к нему применим закон сохранения массы, в соответствии с которым общий расход поступающих в дозатор сыпучих материалов равен общему расходу выходящих из дозатора материалов:

$$Q_{пит} = Q_{доз}$$

Подставим формулы:

$$\gamma S_{пит} h_{пит} V_{пит} = \gamma S_{кон} h_{кон} V_{кон}. \quad (1)$$

Рассмотрим частный случай, когда ширина ленты грузового конвейера равна ширине ленты конвейера питателя, тогда это позволяет записать:

$$\begin{aligned} h_{пит} V_{пит} &= h_{кон} V_{кон}, \\ h_{кон} &= h_{пит} V_{пит} / V_{кон}. \end{aligned} \quad (2)$$

В соответствии со структурной схемой двухагрегатного комбинированного весового дозатора по рисунку 1 автоматическое управление дозатором осуществляется при одновременном регулировании скорости ленты питателя и скорости ленты грузопринимающего конвейера. Аналогично это утверждение относится и к рисунку 2. При этом обязательным условием автоматического управления дозатором должна быть синхронизация скоростей электроприводов двух агрегатов.

Математически это можно представить следующим выражением, связывающим две скорости:

$$V_{пит} = K V_{кон}, \quad (3)$$

где K – коэффициент синхронизации.

Технически это реализуется с помощью устройств синхронизации.

Подставим соотношение (3) в выражение (2), получим:

$$h_{кон} = h_{пит} K V_{кон} / V_{кон}. \quad (4)$$

Сократив, получим:

$$h_{кон} = K h_{пит} \quad (5)$$

Выражение (5) и (3) показывают, что возможно изменение высоты слоя на ленте грузового конвейера регулированием синхронизирующими устройствами по отношению к слою конвейера питателя. Для частного случая, когда коэффициент синхронизации K в выражении (3) равен 1, регулирование высоты слоя на ленте грузового конвейера возможно только изменением скорости этого конвейера.

Другими словами, должна быть установлена следующая функциональная зависимость:

$$h_{кон} = f(V_{кон}).$$

Тогда формула (5) с учетом сказанного переписывается следующим образом:

$$h_{кон} = K h_{пит} V_{кон}. \quad (6)$$

где K – коэффициент передачи привода питателя.

Из выражения (1) легко установить связь для $h_{пит}$

$$h_{пит} = h_{кон} V_{кон} / V_{пит}.$$

Полученное выражение подставим в формулу (6), тогда установим функциональную зависимость

$$V_{пит} = K V_{кон} V_{кон}. \quad (7)$$

Представленный математический аппарат позволил получить функциональную зависимость (7), в соответствии с которой скорость ленты конвейера питателя должна быть пропорциональна квадрату скорости ленты грузоприемного конвейера.

Принцип комбинированного управления двухкомпонентным дозатором предполагает одновременное регулирование двух технологических параметров при наличии одного или двух регуляторов. В первом случае имеет место один контур регулирования с обратной связью по производительности дозатора, во втором – два контура: регулирование скорости ленты питателя и регулирование скорости ленты грузового конвейера.

Принцип реализации комбинированной автоматической системы регулирования предполагает согласованное управление двумя и более исполнительными механизмами. Причем теоретически может изменяться во времени как насыпная масса на ленте грузового конвейера, создаваемая ленточным питателем, так и скорость перемещения ленты грузового конвейера.

Как показывают проведенные расчеты и полученные функциональные зависимости, регулирование расхода материала дозатором должно производиться на практике регулированием приводов и питателя, и конвейера при обеспечении квадратичной зависимости скорости ленты питателя от скорости ленты грузового конвейера.

В работе были выполнены исследования по научно-технической проблеме управления процессом непрерывного весового дозирования сыпучих материалов смесительных установок. Основными результатами являются приведенные ниже положения:

1. Проведена характеристика основных научно-технических разработок в области автоматизации непрерывного весового дозирования сыпучих материалов.

2. В качестве объекта автоматизации выбран дозатор автоматический ленточный весового непрерывного действия "КЛИМ-ВД".

3. Рассмотрена структурная схема современной типовой весоизмерительной установки непрерывного действия.

4. Проведена характеристика автоматизированной системы управления непрерывным весовым дозированием компонентов смесей.

5. Выполнено моделирование процессов непрерывного дозирования сыпучих материалов.

6. Разработана структурная схема двухагрегатного комбинированного весового непрерывного дозатора.

7. Для обеспечения нормальной работы дозатора с точки зрения автоматического управления регулирование расхода материала дозатором должно производиться на практике регулированием приводов и питателя, и конвейера при обеспечении квадратичной зависимости скорости ленты питателя от скорости ленты грузового конвейера.

8. Рассмотрена проблема достижения точности дозирования сыпучих материалов применением замкнутого регулирования основных параметров весового дозатора.

9. Эффективность предложенных научно-технических решений может быть доказана на практике.

Список литературы

1. Дацук К. А. Способ управления режимами дозирования и смешивания с применением вейвлет-преобразований / К. А. Дацук, Е. И. Князьков, Д. Б. Федосенков и др. // Техника и технология пищевых производств. – 2010. – Вып. 3(18). – С. 126–134. – Библиогр.: с. 134 (5 назв.). – ISSN электронной версии: 2313-1748.

2. Поляков С. И. Внедрение модульной системы управления дозированием в производство / С. И. Поляков // Математическое моделирование, компьютерная оптимизация технологий, параметров оборудования и систем лесного комплекса: межвуз. сборник научных трудов. – Воронеж, 2000. – С. 287–288.

References

1. Datsyuk K. A. Method of controlling dosing and mixing modes using wavelet transformations / K. A. Datsyuk, E. I. Knyazkov, D. B. Fedosenkov et al. // Machinery and technology of food production. – 2010. – Issue 3(18). – pp. 126-134. – Bibliogr.: p. 134 (5 titles.). – Electronic version ISSN: 2313-1748.

2. Polyakov S. I. Introduction of a modular dosing control system into production / S. I. Polyakov // Mathematical modeling, computer optimization of technologies, equipment parameters and systems of the forestry complex : interuniversity. collection of scientific papers. Voronezh, 2000, pp. 287-288.

DOI: 10.58168/OpEq2025_166-178

УДК 517.968

**МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ СЕМЕЙСТВО РЕШЕНИЙ
ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА В БАНАХОВОМ
ПРОСТРАНСТВЕ**

A MULTIPARAMETRIC FAMILY OF SOLUTIONS TO THE VOLTERRA
INTEGRAL EQUATION IN BANACH SPACE

Сапронов Иван Васильевич

кандидат физико-математических наук, доцент,
доцент кафедры математики ВГЛУ, г. Воронеж, Россия

Зенина Вероника Валериевна

старший преподаватель кафедры математики ВГЛУ, г. Воронеж, Россия

Смирнова Елена Владимировна

кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры математики ВГЛУ, г. Воронеж, Россия

Sapronov Ivan Vasilievich

Ph.D. of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate
Professor at the Department of Mathematics, VSUFT, Voronezh, Russia

Zenina Veronika Valerievna

Senior Lecturer at the Department of Mathematics, VSUFT, Voronezh, Russia

Smirnova Elena Vladimirovna

Ph.D. of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor at the Department
of Mathematics, VSUFT, Voronezh, Russia

Аннотация. В специально введенном банаховом пространстве изучается интегральное уравнение Вольтерра с ядром третьего порядка, имеющим конечное число производных вблизи нуля. При некоторых ограничениях на

спектр операторного пучка, соответствующего интегральному оператору, строится многопараметрическое семейство решений.

Abstract. In a specially introduced Banach space, the Volterra integral equation with a third-order kernel having a finite number of derivatives near zero is studied. Under certain restrictions on the spectrum of the operator bundle corresponding to the integral operator, a multi-parameter family of solutions is constructed.

Ключевые слова: собственный вектор, обратный оператор, функциональное пространство, характеристическое число, частное решение.

Keywords: eigenvector, inverse operator, functional space, characteristic number, partial solution.

Введение

В действительном функциональном пространстве задана $\|\cdot\|_E$. Ей соответствует в пространстве $L(E)$ всех отображений на E соответствующая норма

$$\|A\|_{L(E)} = \sup_{\|x\|_E=1} \|Ax\|_E.$$

В пространстве $B([0, \delta], E)$ норма выглядит следующим образом

$$\|\alpha(x)\|_{B([0, \delta], E)} = \sup_{0 \leq x \leq \delta} \|\alpha(x)\|_E.$$

Рассмотрим семейство банаховых пространств

$$Q_\gamma^k = \{\alpha(x): \alpha^{(i)}(x) = x^{\gamma-i} \omega_i(x), \omega_i(x) \in B([0, \delta], E)\};$$

$$\|\alpha(x)\|_{Q_\gamma^k} = \max_{0 \leq i \leq k} \|\omega_i(x)\|_{B([0, \delta], E)}\}.$$

Изучается интегральное уравнение

$$\int_0^x K(x, t) \varphi(t) dt = f(x), \quad 0 \leq x \leq \delta \quad (1)$$

с ядром третьего порядка, имеющим конечное число производных вблизи нуля.

Пусть существуют пределы $C_0 = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{K(x,x)}{x^3}$, $C_1 = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{K'_t(x,x)}{x^2}$,
 $C_2 = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{K''_{tt}(x,x)}{x}$, $C_3 = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{-K_{t^3}^{(3)}(x,x)}{x^0}$, причем C_0 имеет ограниченный обратный C_0^{-1} .

Отсюда следует, что при достаточно малом x

$$\begin{aligned} \left\| \frac{K(x,x)}{x^3} - C_0 \right\|_{L(E)} < \varepsilon, \quad \left\| \frac{-K'_t(x,x)}{x^2} - C_1 \right\|_{L(E)} < \varepsilon, \quad \left\| \frac{K''_{tt}(x,x)}{x} - C_2 \right\|_{L(E)} < \varepsilon, \\ \left\| \frac{-K_{t^3}^{(3)}}{x^0} - C_3 \right\|_{L(E)} < \varepsilon \end{aligned} \quad (2)$$

Лемма 1. Уравнение (1) имеет решение $\varphi(x) \in Q_\gamma^0$ ($\varphi(x) = \vartheta''(x)$) тогда и только тогда, когда интегро-дифференциальное уравнение

$$A\vartheta + D\vartheta = f(x) \quad (3)$$

имеет решение $\vartheta(x) \in Q_{\gamma+2}^2$, где

$$(A\vartheta)(x) = C_0 x^3 \vartheta^{(2)}(x) + C_1 x^2 \vartheta'(x) + C_2 x \vartheta(x) + C_3 \int_0^x \vartheta(t) dt, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} (D\vartheta)(x) = [K(x,x) - C_0 x^3] \vartheta^{(2)}(x) + [-K'_t(x,x) - C_1 x^2] \vartheta'(x) + \\ + [K''_{tt}(x,x) - C_2 x] \vartheta(x) + \int_0^x [-K_{t^3}^{(3)}(x,t) - C_3] \vartheta(t) dt. \end{aligned} \quad (5)$$

Доказательство леммы можно провести, интегрируя по частям $\int_0^x K(x,t) \vartheta''(t) dt$.

Действительно,

$$\begin{aligned} \int_0^x K(x,t) \vartheta^{(3)}(t) dt &= K(x,t) \vartheta^{(2)}(t) \Big|_0^x - \int_0^x K'_t(x,t) \vartheta^{(2)}(t) dt = \\ &= K(x,x) \vartheta^{(2)}(x) - K'_t(x,t) \vartheta^{(1)}(t) \Big|_0^x + \int_0^x K''_{tt}(x,t) \vartheta'(t) dt = \\ &= K(x,x) \vartheta^{(2)}(x) - K'_t(x,x) \vartheta'(x) + K''_{tt}(x,x) \vartheta(x) - \int_0^x K_{t^3}^{(3)}(x,t) \vartheta(t) dt = \\ &= [K(x,x) - C_0 x^3] \vartheta^{(2)}(x) + [-K'_t(x,x) - C_1 x^2] \vartheta'(x) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + [K''_{tt}(x, x) - C_2 x] \vartheta(x) + \int_0^x [-K_{t^3}^{(3)}(x, t) - C_3] \vartheta(t) dt + \\
& + C_0 x^3 \vartheta^{(2)}(x) + C_1 x^2 \vartheta'(x) + C_2 x \vartheta(x) + C_3 \int_0^x \vartheta(t) dt = \\
& = (A\vartheta)(x) + (D\vartheta)(x), \quad \vartheta(x) \in Q_{\gamma+2}^2.
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть операторный пучок

$$P(\alpha) = C_0(\alpha + 3)(\alpha + 2) + C_1(\alpha + 3) + C_2 + C_3 \frac{1}{\alpha + 4}$$

имеет характеристическое число $\alpha > -1$, которому соответствует собственный вектор u_0 и цепочка присоединенных векторов u_i ($i = 1, \dots, m$). Тогда для уравнения $A\vartheta = 0$ существует $m + 1$ линейно независимых решений, принадлежащих пространству $Q_{\gamma+3}^3$, где $\gamma \geq \alpha$. Они будут иметь вид

$$\vartheta_e(x) = x^{\alpha+3}(a_0 + a_1 \ln x + \dots + a_e \ln^e x), \quad e = 0, \dots, m. \quad (6)$$

Доказательство. Найдем $\vartheta'_e(x)$, $\vartheta''_e(x)$.

$$\begin{aligned}
\vartheta'(x) &= (\alpha + 3)x^{\alpha+2}(a_0 + a_1 \ln x + a_2 \ln^2 x + \dots + a_e \ln^e x) + \\
& + x^{\alpha+2}(a_1 + 2a_2 \ln x + 3a_3 \ln^2 x + \dots + e \ln^{e-1} x),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vartheta''(x) &= (\alpha + 3)(\alpha + 2)x^{\alpha+1}(a_0 + a_1 \ln x + a_2 \ln^2 x + \dots + a_e \ln^e x) + \\
& + [(\alpha + 2) + (\alpha + 3)]x^{\alpha+1}(a_1 + 2a_2 \ln x + 3a_3 \ln^2 x + \dots + e \ln^{e-1} x) + \\
& + x^{\alpha+1}(2a_2 + 6a_3 \ln x + 12a_4 \ln^2 x + \dots + e(e - 1) \ln^{e-2} x).
\end{aligned}$$

Подставляя $\vartheta_e(x)$, $\vartheta'_e(x)$, $\vartheta''_e(x)$ в уравнение $A\vartheta = 0$, получаем

$$\begin{aligned}
& C_0 x^3 \{(\alpha + 3)(\alpha + 2)x^{\alpha+1}(a_0 + a_1 \ln x + a_2 \ln^2 x + \dots + a_e \ln^e x) + \\
& + [(\alpha + 2) + (\alpha + 3)]x^{\alpha+1}(a_1 + 2a_2 \ln x + 3a_3 \ln^2 x + \dots + e a_e \ln^{e-1} x) + \\
& + x^{\alpha+1}(2a_2 + 6a_3 \ln x + 12a_4 \ln^2 x + \dots + e(e - 1)a_e \ln^{e-2} x)\} + \\
& + C_1 x^2 [(\alpha + 3)x^{\alpha+2}(a_0 + a_1 \ln x + a_2 \ln^2 x + \dots + a_e \ln^e x) + \\
& + x^{\alpha+2}(a_1 + 2a_2 \ln x + 3a_3 \ln^2 x + \dots + e a_e \ln^{e-1} x)] +
\end{aligned}$$

$$+C_2x^{\alpha+4}(a_0 + a_1\ln x + a_2\ln^2 x + \dots + a_e\ln^e x) + \\ +C_3 \left[a_0 \frac{x^{\alpha+4}}{\alpha+4} + \sum_{p=1}^e a_p \sum_{k=0}^p (-1)^k \frac{p!}{(p-k)! (\alpha+4)^{k+1}} \ln^{p-k} x \right] = 0.$$

Приравнявая коэффициенты при $x^{\alpha+4}\ln^k x$ ($k = e, e-1, \dots, 0$), получаем следующую систему уравнений

$$1) k = e$$

$$\left(C_0(\alpha+3)(\alpha+2) + C_1(\alpha+3) + C_2 + C_3 \frac{1}{\alpha+4} \right) a_e = 0,$$

$$P(\alpha)a_e = 0$$

$$2) k = e-1$$

$$C_0[(\alpha+3)(\alpha+2)a_{e-1} + [(\alpha+2) + (\alpha+3)]ea_e] + \\ + C_1[(\alpha+3)a_{e-1} + ea_e] + C_2a_{e-1} - C_3e \frac{1}{(\alpha+4)^2} a_e + C_3 \frac{1}{\alpha+4} a_{e-1} = 0$$

или

$$\left[C_0(\alpha+3)(\alpha+2) + C_1(\alpha+3) + C_2 + \frac{1}{\alpha+4} C_3 \right] a_{e-1} + \\ + [C_0[(\alpha+2) + (\alpha+3)]e + C_1e - C_3e \frac{1}{(\alpha+4)^2}] a_e = 0$$

или

$$P(\alpha)a_{e-1} + P'(\alpha)ea_e = 0$$

$$3) k = e-2$$

$$C_0[(\alpha+3)(\alpha+2)a_{e-2} + [(\alpha+2) + (\alpha+3)](e-1)a_{e-1} + \\ + (e-1)ea_e] + C_1[(\alpha+3)a_{e-2} + (e-1)a_{e-1}] + C_2a_{e-2} + \\ + C_3[a_e e(e-1) \frac{1}{(\alpha+4)^3} - a_{e-1}(e-1) \frac{1}{(\alpha+4)^2} + a_{e-2} \frac{1}{\alpha+4}] = 0$$

или

$$(C_0(\alpha+3)(\alpha+2) + C_1(\alpha+3) + C_2 + \frac{1}{\alpha+4} C_3) a_{e-2} + \\ + \{C_0[(\alpha+2) + (\alpha+3)](e-1) + C_1(e-1) -$$

$$-C_3(e-1)\frac{1}{(\alpha+4)^2}a_{e-1} + \\ + [C_0e(e-1) + C_3e(e-1)\frac{1}{(\alpha+4)^3}]a_{e-2} = 0$$

или

$$P(\alpha)a_{e-2} + (e-1)P'(\alpha)a_{e-1} + \frac{e(e-1)}{2}P''(\alpha)a_e = 0$$

$$4) k = e - 3$$

$$\left[C_0[(\alpha+3)(\alpha+2)] + C_1(\alpha+3) + C_2 + C_3\frac{1}{\alpha+4} \right] a_{e-3} + \\ + \{ C_0[(\alpha+2) + (\alpha+3)](e-2) + C_1(e-2) - \\ - C_3(e-2)\frac{1}{(\alpha+4)^2} \} a_{e-2} + \\ + \left\{ C_0(e-1)(e-2) + C_3(e-1)(e-2)\frac{1}{(\alpha+4)^3} \right\} a_{e-1} - \\ - C_3e(e-1)(e-2)\frac{1}{(\alpha+4)^4} a_e = 0$$

или

$$P(\alpha)a_{e-3} + (e-2)P'(\alpha)a_{e-2} + \frac{e(e-1)}{2}P''(\alpha)a_{e-1} + \\ + \frac{e(e-1)(e-2)}{6}P'''(\alpha)a_e = 0$$

$$5) k = e - z \quad (z = 4, 5, \dots, e)$$

$$C_0[(\alpha+3)(\alpha+2)a_{e-z} + [(\alpha+2) + (\alpha+3)](e-z+1)a_{e-z+1} + \\ + (e-z+2)(e-z+1)a_{e-z+2}] + \\ + C_1[(\alpha+3)a_{e-z} + (e-z+1)a_{e-z+1}] + C_2a_{e-z} + \\ + C_3[a_{e-z}\frac{1}{\alpha+4} - a_{e-z+1}(e-z+1)\frac{1}{(\alpha+4)^2} + \\ + a_{e-z+2}(e-z+1)(e-z+2)\frac{1}{(\alpha+4)^3} - \\ - a_{e-z+3}(e-z+1)(e-z+2)(e-z+3)\frac{1}{(\alpha+4)^4} + \dots +$$

$$+(-1)^{z-1}a_{e-1}(e-z+1) \cdot \dots \cdot (e-1) \frac{1}{(\alpha+4)^z} +$$

$$+(-1)^2 a_e (e-z+1) \cdot \dots \cdot e \frac{1}{(\alpha+4)^{z+1}}] = 0$$

ИЛИ

$$P(\alpha)a_{e-z} + (e-z+1)P'(\alpha)a_{e-z+1} + \frac{(e-z+1)(e-z+2)}{2!}P''(\alpha)a_{e-z+2} +$$

$$+ \frac{(e-z+1)(e-z+2)(e-z+3)}{3!}P'''(\alpha)a_{e-z+3} + \dots +$$

$$+ \frac{(e-z+1) \cdot \dots \cdot (e-1)}{(z-1)!}a_{e-1} + \frac{(e-z+1) \cdot \dots \cdot e}{z!}a_e = 0.$$

Получили следующую систему уравнений

$$1) P(\alpha)a_e = 0$$

$$2) P(\alpha)a_{e-1} + P'(\alpha)a_e = 0$$

$$3) P(\alpha)a_{e-2} + (e-1)P'(\alpha)a_{e-1} + \frac{e(e-1)}{2}P''(\alpha)a_e = 0$$

$$4) P(\alpha)a_{e-3} + (e-2)P'(\alpha)a_{e-2} + \frac{(e-2)(e-1)}{2}P''(\alpha)a_{e-1} +$$

$$+ \frac{e(e-1)(e-2)}{6}P'''(\alpha)a_e = 0$$

$$5) P(\alpha)a_{e-z} + (e-z+1)P'(\alpha)a_{e-z+1} + \frac{(e-z+1)(e-z+2)}{2}P''(\alpha)a_{e-z+2} +$$

$$+ \frac{(e-z+1)(e-z+2)(e-z+3)}{6}P'''(\alpha)a_{e-z+3} + \dots + \frac{(e-z+1) \cdot \dots \cdot (e-1)}{(z-1)!}P^{(z-1)}(\alpha)a_{e-1} +$$

$$+ \frac{(e-z+1) \cdot \dots \cdot e}{z!}P^{(z)}(\alpha)a_e = 0.$$

Решая последовательно данную систему уравнений, получаем

$$1) a_e = u_0;$$

$$2) P(\alpha)a_{e-1} + eP'(\alpha)u_0 = 0, \quad a_{e-1} = eu_1;$$

$$3) P(\alpha)a_{e-2} + e(e-1)P'(\alpha)u_1 + \frac{e(e-1)}{2}P''(\alpha)u_0 = 0,$$

$$a_{e-2} = e(e-1)u_2;$$

$$4) P(\alpha)a_{e-3} + (e-2)(e-1)eP'(\alpha)u_2 + \frac{(e-2)(e-1)e}{2}P''(\alpha)u_1 +$$

$$+ \frac{e(e-1)(e-2)}{6} P'''(\alpha) u_0 = 0, \quad a_{e-3} = e(e-1)(e-2) u_3;$$

$$\begin{aligned} & 5) P(\alpha) a_{e-z} + e(e-1) \cdot \dots \cdot (e-z+1) P'(\alpha) u_{z-1} + \\ & + e(e-1) \cdot \dots \cdot (e-z+1) \frac{P''(\alpha)}{2} u_{z-2} + \\ & + e(e-1) \cdot \dots \cdot (e-z+1) \frac{P'''(\alpha)}{3!} u_{z-3} + \dots + \\ & + e(e-1) \cdot \dots \cdot (e-z+1) \frac{P^{(z-1)}(\alpha)}{(z-1)!} u_1 + \\ & + e(e-1) \cdot \dots \cdot (e-z+1) \frac{P^{(z)}(\alpha)}{z!} u_0 = 0, \\ & a_{e-2} = e(e-1) \cdot \dots \cdot (e-z+1) u_z = \frac{e!}{(e-z)!} u_z. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$a_{e-2} = \frac{e!}{(e-z)!} u_z \quad (z = 0, 1, 2, \dots, e).$$

Лемма доказана.

Лемма 3. Операторы A и D действуют из $Q_{\gamma+3}^3$ в $Q_{\gamma+4}^1$, причем для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое что $\|D\|_{Q_{\gamma+3}^3 \rightarrow Q_{\gamma+4}^1} < \varepsilon$ при $0 \leq x \leq \delta$.

Действительно, если $\vartheta(x) \in Q_{\gamma+3}^3$, то $\vartheta'(x) \in Q_{\gamma+2}^2$, $\vartheta''(x) \in Q_{\gamma+1}^1$,
 $x^3 \vartheta''(x) \in Q_{\gamma+4}^1$, $x^2 \vartheta'(x) \in Q_{\gamma+4}^2 \in Q_{\gamma+4}^1$, $x \vartheta(x) \in Q_{\gamma+4}^3 \in Q_{\gamma+4}^1$,
 $\int_0^x \vartheta(t) dt \in Q_{\gamma+4}^4 \in Q_{\gamma+4}^1$.

Таким образом $A\vartheta \in Q_{\gamma+4}^1$, $D\vartheta \in Q_{\gamma+4}^1$. Нетрудно оценить норму оператора D , $\|D\|_{Q_{\gamma+3}^3 \rightarrow Q_{\gamma+4}^1} < \varepsilon$ при достаточно малых x ($0 \leq x \leq \delta$).

Лемма 4. При любой $f(x) \in Q_{\gamma+4}^1$ уравнение $A\vartheta = f$ имеет частное решение $\vartheta \in Q_{\gamma+3}^3$, удовлетворяющее условию $\|\vartheta\|_{Q_{\gamma+3}^3} \leq C \|f\|_{Q_{\gamma+4}^1}$.

Доказательство. Введем новые функции $\int_0^x \vartheta(t) dt = w_1(x)$,
 $x\vartheta(x) = w_2(x)$, $x^2\vartheta' = w_3(x)$, тогда уравнение $A\vartheta = f$ сведется к следующей системе уравнений

$$\begin{cases} xw'_1 = w_2 \\ xw'_2 = w_2 + w_3 \\ xw'_3 = -C_0^{-1}C_3w_1 - C_0^{-1}C_2w_2 + (2I - C_0^{-1}C_1)w_3 + C^{-1}f \end{cases}$$

или

$$xw' + Bw = \bar{f}(x), \quad (7)$$

где

$$w(x) = \begin{pmatrix} w_1(x) \\ w_2(x) \\ w_3(x) \end{pmatrix}, \quad B_{E \times E \rightarrow E \times E} = \begin{pmatrix} 0 & -I & 0 \\ 0 & -I & -I \\ C_0^{-1}C_3 & C_0^{-1}C_2 & C_0^{-1}C_1 - 2I \end{pmatrix},$$

$$\bar{f}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ C_0^{-1}f(x) \end{pmatrix}.$$

Значения $\bar{f}(x)$ принадлежат пространству $E \times E$.

Разрешающий оператор уравнения $xw' + Bw = 0$ имеет вид $U(x, s) = e^{\left(\int_x^s \frac{dt}{t} B\right)}$. Если спектр оператора B лежит в левой полуплоскости $\text{Re} \lambda \leq \gamma^* < 0$, то справедлива оценка $\|U(x, s)\| \leq Ne^{-\bar{\gamma} \int_x^s \frac{dt}{t}}$, $0 \leq x \leq s \leq \delta$, $\gamma^* < -\bar{\gamma} < 0$, $N > 0$.

Рассмотрим операторные уравнения

$$\begin{cases} (B - \lambda I)e = 0 & \text{или} \\ -\lambda e_1 - e_2 = 0 \\ -(1 + \lambda)e_2 - e_3 = 0 \\ C_0^{-1}C_3e_1 + C_0^{-1}C_2e_2 + (C_0^{-1}C_1 - (2 + \lambda)I)e_3 = 0 \end{cases}$$

Преобразовывая эту систему уравнений, получаем

$$\left(C_0^{-1}C_3 \frac{1}{\lambda(\lambda+1)} - C_0^{-1}C_2 \frac{1}{1+\lambda} + (C_0^{-1}C_1 - (2 + \lambda)I) \right) e_3 = 0,$$

$$\left(C_3 \frac{1}{\lambda(\lambda+1)} - C_2 \frac{1}{1+\lambda} + C_1 - C_0(2 + \lambda) \right) e_3 = 0,$$

$$\left(C_3 \left(-\frac{1}{\lambda}\right) + C_2 - C_1(1 + \lambda) + (1 + \lambda)(2 + \lambda)C_0 \right) e_3 = 0.$$

Сделаем замену $-\lambda = \alpha + 4$, тогда получим

$$\left[\frac{1}{\alpha+4} C_3 + C_2 + C_1(\alpha + 3) + (\alpha + 3)(\alpha + 2)C_0 \right] e_3 = 0.$$

Следовательно, $P(\alpha)e_3 = 0$.

Нетрудно заметить, что если $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ ($-1 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_m$) являются характеристическими числами для операторного пучка $P(\alpha)$, тогда $\lambda_1 = -(\alpha_1 + 4), \lambda_2 = -(\alpha_2 + 4), \dots, \lambda_m = -(\alpha_m + 4)$ ($\lambda_m < \lambda_{m-1} < \dots < \lambda_1 < -3$) составляют спектр оператора B . В нашем случае $\gamma^* \leq -3, 0 > -\bar{\gamma} > \gamma^*, N$ не зависит от x и s .

Следовательно, для разрешающего оператора $U(x, s)$ будет справедлива вышеуказанная оценка.

Нетрудно доказать, что для решения уравнения $Aw = f$ вида

$$w(x) = \int_0^x U(x, s) \bar{f}(s) ds = \int_0^x e^{\int_x^s dt B} \bar{f}(s) \frac{ds}{s} \quad (8)$$

справедлива оценка

$$\|w\|_{Q_{\gamma+3}^3} \leq C \|f\|_{Q_{\gamma+4}^1}.$$

Теорема. Пусть порядок интегрального оператора $K\varphi = \int_0^x K(x, t)\varphi(t)dx$ равен 3, $K(x, t)$ удовлетворяет дополнительному условию $C_0 = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{K(x, x)}{x^3}, C_1 = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{-K'_t(x, x)}{x^2}, C_2 = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{K''_{tt}(x, x)}{x}, C_3 = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{-K^{(3)}_{t^3}(x, x)}{x^0}$, причем C_0 имеет ограниченный обратный, операторный пучок $P(\alpha) = C_0(\alpha + 3)(\alpha + 2) + C_1(\alpha + 3) + C_2 + C_3 \frac{1}{\alpha + 4}$ удовлетворяет условию Леммы 2, $f(x)$ принадлежит пространству $Q_{\gamma+4}^1$. Тогда при γ , удовлетворяющем условию $-\bar{\gamma} < -(\gamma + 4)$ существует такое $\delta > 0$, что при $0 \leq x \leq \delta$ уравнение (1) имеет многопараметрическое семейство решений в пространстве Q_γ^0

$$\varphi(x) = z^{(3)}(x) = [\bar{z}(x) + z_0(x)]^{(3)},$$

где $\bar{z}(x)$ – частное решение уравнения $A\bar{z} + D\bar{z} = f$, $z_0(x)$ – общее решение соответствующего однородного уравнения.

Список литературы

1. Сапронов И.В. Интегральное уравнение Вольтерра в банаховом пространстве // Моделирование систем и процессов. 2023. Т. 16. №3. С. 105-114.
2. Сапронов И.В. Многопараметрическое семейство решений линейного интегрального уравнения Вольтерра I рода // Известия вузов. Математика. 2024. №5. С. 47-62.
3. Магницкий Н. А. Линейные интегральные уравнения Вольтерра I и III рода // Журнал выч. мат. и мат. физ. 1979. Т. 19. № 4. С. 970-988.
4. Магницкий Н.А. Многопараметрические семейства решений интегральных уравнений Вольтерра // ДАН СССР. 1978. Т. 240. № 2. С. 268-271.
5. Магницкий Н.А. О существовании многопараметрических семейств решений интегрального уравнения Вольтерра I-го рода // ДАН СССР. 1977. Т. 235. № 4. С. 772-774.
6. Крейн С.Г., Сапронов И.В. О полноте системы решений интегрального уравнения Вольтерра с особенностью // Докл. РАН. 1997. Т. 355. № 4. С. 450-452.
7. Крейн С.Г., Сапронов И.В. Об интегральных уравнениях Вольтерра с особенностями // УМН. 1995. Т. 50. Вып. 4. С. 140.
8. Krein S.G. Singular integral Volterra equations // Abstracts. International Congress of Mathematics. Zurich. 3-11 August. 1994. P. 125.
9. Krein S.G., Saponov I.V. One class of solutions of Volterra equation with regular singularity // Укр. мат. ж. 1997. Т. 49. № 3. С. 424-432.
10. Сапронов И.В. Об одном классе решений уравнения Вольтерра II рода с регулярной особенностью в банаховом пространстве // Известия высших учебных заведений. Математика. 2004. № 6. С. 48-58.
11. Сапронов И.В. Многопараметрическое семейство решений интегрального уравнения Вольтерра с особенностью в банаховом пространстве // Известия высших учебных заведений. Математика. 2005. № 2. С. 81-83.

12. Сапронов И.В. Уравнение Вольтерра с особенностью в банаховом пространстве // Известия высших учебных заведений. Математика. 2007. № 11. С. 45-55.

13. Сапронов И.В. Многопараметрическое семейство решений интегрального уравнения Вольтерра с особенностью в банаховом пространстве // Известия высших учебных заведений. Математика. 2011. № 1. С. 59-71.

14. Глушко В.П. Линейные вырождающиеся дифференциальные уравнения // ВГУ. 1972.

15. Сапронов И.В. Линейное интегральное уравнение Вольтерра I рода, Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. (1), 87-96 (2022).

References

1. Sapronov I.V. Volterra integral equation in a Banach space // Modeling of systems and processes. 2023. V. 16. No. 3. P. 105-114.

2. Sapronov I.V. A multi-parameter family of solutions to the linear Volterra integral equation of the first kind // Izvestiya vuzov. Mathematics. 2024. No. 5. Pp. 47-62.

3. Magnitsky N.A. Linear integral Volterra equations of the I and III kind // Journal of vych. mat. and mat. phys. 1979. T. 19. No. 4. С. 970-988.

4. Magnitsky N.A. Multiparametric families of solutions of Volterra integral equations // DAN USSR. 1978. T. 240. No. 2. С. 268-271.

5. Magnitsky N.A. On the existence of multiparametric families of solutions of the Volterra integral equation of the I-th kind // DAN USSR. 1977. T. 235. No. 4. С. 772-774.

6. Krein S.G., Sapronov I.V. On the completeness of the system of solutions of the Volterra integral equation with singularity //Dokl. RAS. 1997. T. 355. No. 4. С. 450-452.

7. Krein S.G., Saprnov I.V. On Volterra integral equations with singularities // UMN. 1995. T. 50. Issue. 4. C. 140.
8. Krein S.G. Singular integral Volterra equations // Abstracts. International Congress of Mathematics. Zurich. 3-11 August. 1994. P. 125.
9. Krein S.G., Saprnov I.V. One class of solutions of Volterra equation with regular singularity // Ukr. mat. zh. 1997. T. 49. No. 3. pp. 424-432.
10. Saprnov I.V. On one class of solutions of the Volterra equation of the second kind with a regular singularity in a Banach space // Izvestiya vysshikh uchebnykh uchebnykh. Mathematics. 2004. No. 6. pp. 48-58.
11. Saprnov I.V. A multiparametric family of solutions of the Volterra integral equation with a singularity in a Banach space // Izvestiya vysshikh uchebnykh uchebnykh. Mathematics. 2005. No. 2. pp. 81-83.
12. Saprnov I.V. Volterra equation with a singularity in a Banach space // Izvestiya vysshikh uchebnykh institutov. Mathematics. 2007. No. 11. pp. 45-55.
13. Saprnov I.V. A multiparametric family of solutions of the Volterra integral equation with a singularity in a Banach space // Izvestiya vysshikh uchebnykh uchebnykh. Mathematics. 2011. No. 1. pp. 59-71.
14. Glushko V.P. Linear degenerate differential equations // VSU. 1972.
15. Saprnov I.V. Linear Volterra Integral Equation of the First Kind, Vestnik VGU. Series: Physics. Mathematics. (1), 87-96 (2022).

DOI: 10.58168/OpEq2025_179-190

УДК 519.6

**ВЛИЯНИЕ ЦВЕТОВЫХ ПРОСТРАНСТВ ПРИ РАСПОЗНАВАНИИ
ОБЪЕКТА НА ИЗОБРАЖЕНИИ**

INFLUENCE OF COLOR SPACES IN OBJECT RECOGNITION IN AN IMAGE

Седых Ирина Александровна

доктор технических наук, доцент, профессор кафедры автоматизированных систем управления ЛГТУ, г. Липецк, Россия

Харитонов Александр Евгеньевич

аспирант 1-го года обучения кафедры автоматизированных систем управления ЛГТУ, г. Липецк, Россия

Sedykh Irina Alexandrovna

D.Sc. of Technical Sciences, Professor, Professor of the Department of Automated Control Systems, Lipetsk State Technical University, Lipetsk, Russia

Kharitonov Alexander Evgenievich

1st year postgraduate student of the Department of Automated Control Systems, Lipetsk State Technical University, Lipetsk, Russia

Аннотация. В статье рассмотрено влияние цветковых пространств RGB, HSV, YCbCr, Lab при распознавании объекта на изображении. Работа выполнена при помощи скрипта, написанного на языке Python в среде Jupiter Notebook. Скрипт позволяет получить такие метрики для сравнения изображений, как среднеквадратическая ошибка (MSE) и скорость обработки для каждого цветкового пространства. Представлены результаты исследования с помощью метрик в табличном виде и сделан вывод о проделанной работе.

Abstract. The article examines the influence of RGB, HSV, YCbCr, Lab color spaces in recognizing objects in an image. The work was done using a script written

in Python in the Jupiter Notebook environment. The script allows you to get such metrics for comparing images as the mean square error (MSE) and processing speed for each color space. The results of the study using the metric are presented in tabular form and conclusions are made about the work done.

Ключевые слова: цветовые пространства, RGB, HSV, YCbCr, Lab, нейросеть, компьютерная графика, обработка изображений, среднеквадратическая ошибка, распознавание объектов.

Keywords: color spaces, RGB, HSV, YCbCr, Lab, neural network, computer graphics, image processing, mean square error, object recognition.

Введение

На сегодняшний день большое количество информации представлено визуально, например, с помощью различных изображений (прямоугольная матрица, состоящая из пикселей) [1]. Обработка может происходить путем изменения разрешения, кадрирования, замены цвета, удаления объектов, наложения нескольких изображений друг на друга, кластеризации или сегментации и так далее.

Одним из способов сегментации изображения является распознавание человека на изображении. Более того, на текущий момент нейросети очень активно используются в таких процессах, а в их работе нам необходима скорость и точность работы, о чем и пойдет речь.

На сегодняшний день замена цветового пространства при обработке используется, например, при распознавании лиц на видео или для подготовки изображения к печати, однако применение данного способа при работе в распознавании человека целиком на фотографии не рассматривалось. Актуальность данной работы обуславливается тем, что при переходе в другое цветовое пространство изображение считывается и воспринимается системой иначе, чем в привычном RGB пространстве, а значит и распознавание человека в другом пространстве может происходить иначе.

Целью работы является исследование и реализация методов распознавания человека при работе в разных цветовых пространствах, таких как RGB, HSV, HSL, YCbCr [2] и Lab [3], их влияние на обработку изображений и приведен анализ полученных метрик в результате работы программного обеспечения.

1. Модель YOLO и цветовые пространства

1.1. Модель YOLO

YOLOv5 — это одна из самых популярных моделей для задачи обнаружения объектов (object detection) на изображениях и видео. Она способна в реальном времени распознавать и локализовать объекты различных классов, отмечая их ограничивающими рамками (bounding boxes). YOLOv5 отличается высокой скоростью и точностью, что делает её подходящей для применения в производственных, автомобильных, медицинских и прочих сферах.

YOLO (You Only Look Once) — семейство моделей, впервые представленное в 2015 году Джозефом Редмоном. Однако YOLOv5 имеет немного иную историю:

- YOLOv1 – YOLOv4 создавались и поддерживались такими исследователями, как Джозефа Редмона и Алексей Бочковски (YOLOv4).
- YOLOv5 была представлена в июне 2020 года компанией Ultralytics. В отличие от предыдущих версий, она была написана на Python с использованием PyTorch, в то время как YOLOv4 использовала Darknet (C/C++).

Однако YOLOv5 не является официальным продолжением YOLOv4, но фактически стала самой YOLOv5 имеет модульную структуру, включающую:

- Backbone – извлекает признаки из изображения (обычно CSPDarknet).
- Neck – объединяет признаки на разных уровнях (обычно PANet).
- Head – делает предсказания (bounding boxes и классы объектов).

Также YOLOv5 поддерживает аугментацию данных, автоматический анкор, квантизацию, экспорт в ONNX, CoreML и TorchScript и многое другое.

1.2. Цветовое пространство RGB

Цветовое пространство RGB всегда встречается там, где есть светящиеся экраны, так как именно сложение цветов излучающих объектов она и описывает. Данная модель имеет определённые ограничения в цветовом диапазоне, так как может отобразить только те оттенки, которые получаются исключительно за счёт свечения пикселей экрана в определённых пропорциях.

Ниже приведено визуальное представление модели RGB (рис. 1.)

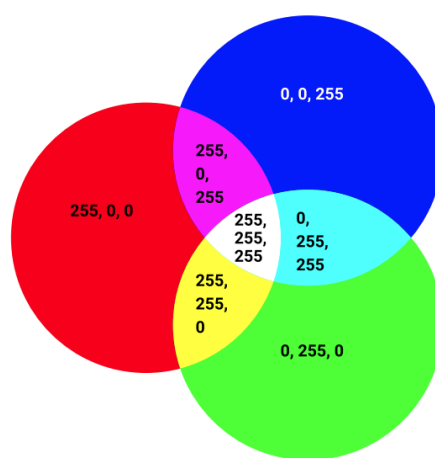


Рис. 1. Цветовое пространство RGB

1.3. Цветовое пространство HSV

Цветовое пространство HSV – пространство семейства HS, отличия заключаются в последней букве и визуальном представлении. Данное пространство является более интуитивным, в связи с использованием цветового тона (Hue), насыщенности (Saturation) и значения (Value), где последняя буква в аббревиатуре может меняться. Ниже приведено визуальное представление семейства HS (рис. 2).

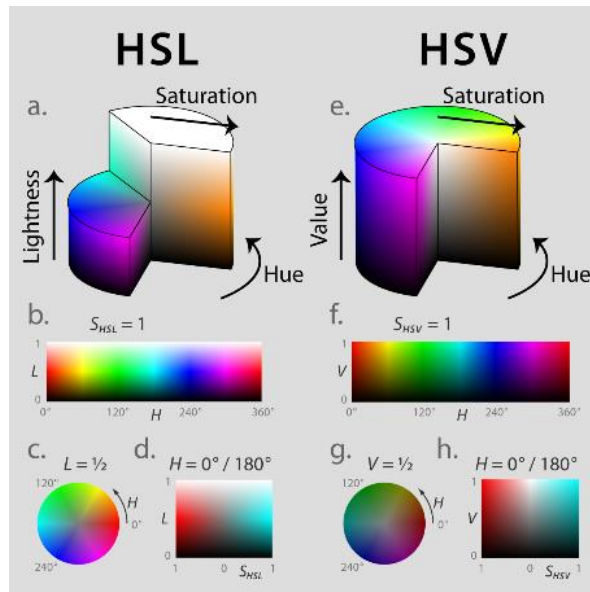


Рис. 2. Цветовые пространства HSL, HSV

1.4. Цветовое пространство YCbCr

1.5.

Пространство YCbCr использовалось для цифрового кодирования информации о цвете, подходящего для сжатия и передачи видео и неподвижных изображений, таких как MPEG и JPEG [2]. Ниже приведено визуальное представление YCbCr (рис. 3).

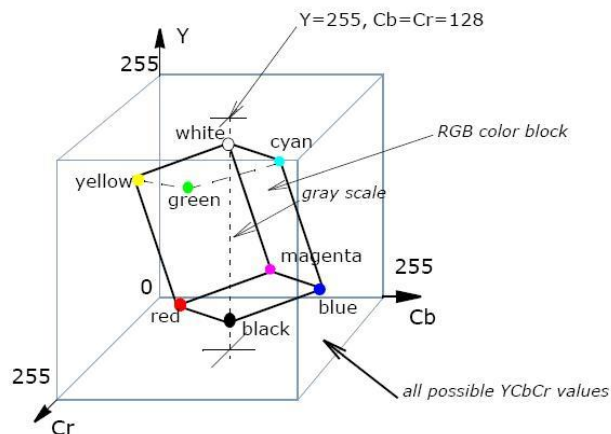


Рис. 3. Цветовое пространство YCbCr

1.6. Цветовое пространство Lab

Цветовое пространство Lab было разработано для преодоления недостатков предыдущих моделей. У него нет ограничения в цветовом охвате. Главным преимуществом данной модели является то, что яркость в ней отделена от цвета, что удобно для регулирования контраста, резкости и прочего. Буквы в аббревиатуре не обозначают цвета, в данном случае «L» обозначает яркость (lightness), а «a» и «b» – некоторые абстрактные координаты. Ниже приведено визуальное представление модели Lab (рис. 4).

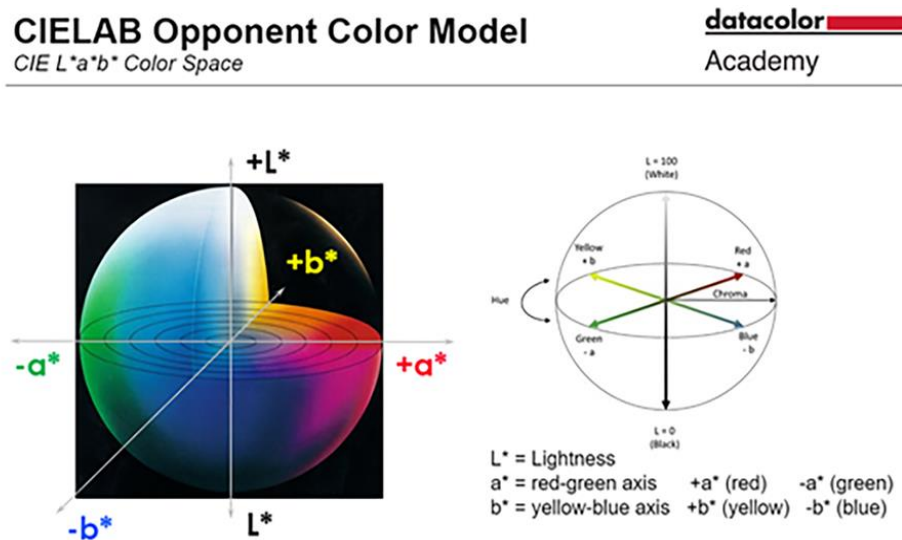


Рис. 4. Цветовое пространство Lab

2. Результаты работы

Для работы были выбраны реальные фотографии размером 6000x4000 пикселей, сделанные самостоятельно. Далее будут приведены несколько примеров результата обработки изображений в цветовых пространствах RGB, HSV, YCbCr, Lab. На фотографиях объект выделяется рамкой, над которой указана вероятность правильного распознавания объекта, в нашем случае – человека, а ниже приведены время обработки для каждого цветового пространства, точность предсказания при распознавании объекта и среднеквадратическая ошибка [4] (рис.5 - 8).



Общее количество обработанных изображений: 39

Среднее время обработки для каждого цветового пространства:

HSV: 0.2763 секунд

YCbCr: 0.2784 секунд

Lab: 0.2823 секунд

RGB: 0.2853 секунд

Средняя точность предсказаний для объекта 'Person':

RGB: 0.8191

СКО для RGB: 0.0981

HSV: 0.4956

СКО для HSV: 0.3230

YCbCr: 0.6538

СКО для YCbCr: 0.2486

Lab: 0.6382

СКО для Lab: 0.2360

Рис. 5. Пример результата обработки 1



Общее количество обработанных изображений: 34
 Среднее время обработки для каждого цветового пространства:
 HSV: 0.3111 секунд
 YCbCr: 0.3148 секунд
 Lab: 0.3218 секунд
 RGB: 0.3254 секунд
 Средняя точность предсказаний для объекта 'Person':
 RGB: 0.7035
 SKO для RGB: 0.1663
 HSV: 0.3915
 SKO для HSV: 0.3290
 YCbCr: 0.5832
 SKO для YCbCr: 0.2547
 Lab: 0.5866
 SKO для Lab: 0.2497

Рис. 6. Пример результата обработки 2



Общее количество обработанных изображений: 60

Среднее время обработки для каждого цветового пространства:

HSV: 0.3320 секунд

YCbCr: 0.3341 секунд

RGB: 0.3381 секунд

Lab: 0.3391 секунд

Средняя точность предсказаний для объекта 'Person':

RGB: 0.7070

СКО для RGB: 0.1683

HSV: 0.3637

СКО для HSV: 0.3188

YCbCr: 0.6140

СКО для YCbCr: 0.2412

Lab: 0.6200

СКО для Lab: 0.2343

Рис. 7. Пример результата обработки 3



Общее количество обработанных изображений: 100

Среднее время обработки для каждого цветового пространства:

RGB: 0.2798 секунд

HSV: 0.2834 секунд

YCbCr: 0.2875 секунд

Lab: 0.2906 секунд

Средняя точность предсказаний для объекта 'Person':

RGB: 0.7908

СКО для RGB: 0.1647

HSV: 0.5694

СКО для HSV: 0.3448

YCbCr: 0.7358

СКО для YCbCr: 0.2336

Lab: 0.7388

СКО для Lab: 0.2284

Рис. 8. Пример результата обработки 4

В ходе анализа метрик можно сделать вывод, что HSV работает быстрее, но вероятность предсказания меньше. В RGB пространстве вероятность выше, но часто бывают такие ситуации, когда модель распознаёт посторонние объекты, при этом эти объекты могут распознаваться неправильно. В YCbCr и Lab получены средние между RGB и HSV результаты в точности и скорости обработки.

Заключение

В ходе работы было рассмотрено влияние смены цветового пространства на распознавание объектов на изображении. Для исследования был реализован скрипт на языке Python в среде разработки Jupiter Notebook, который позволяет вычислить такие метрики для сравнения обработанного изображения, как скорость вычислений при обработке для каждого цветового пространства и значение среднеквадратической ошибки. Для обработки использовались реальные фотографии размером 6000x4000 пикселей.

Исходя из результатов можно сказать, что влияние смены цветового пространства заметно. Если обработка в RGB пространстве происходит с большей точностью вероятности распознавания, то в HSV точность меньше, однако обработка происходит быстрее. При этом в RGB чаще встречается неправильное или «лишнее» распознавание объектов, что реже проявляется в HSV. Обработка в пространствах YCbCr и Lab показала средние результаты.

Можно также сказать, что HSV является наиболее интересным пространством при распознавании объектов, несмотря на более низкую вероятность распознавания, так как данное цветовое пространство позволит быстрее обработать большую базу изображений при их большом размере в 6000x4000 пикселей.

Список литературы

1. Гонсалес Р. Цифровая обработка изображений / Р. Гонсалес, Р. Вудс. – Москва : Техносфера, 2006. – 1072 с.
2. Understanding Color Models : A Review / N. A. Ibraheem, M. M. Hasan, R. Z. Khan, P. K. Mishra. – Text : immediate // India : ARPN Journal of Science, Technology. – 2012. – Vol. 2, № 3. – С. 265–275.
3. Маргулис Д. Photoshop для профессионалов : классическое руководство по цветокоррекции / Д. Маргулис ; перевод с английского. – 5-е изд. – Москва : Интелбук, 2007. – 656 с.

4. Umme S. Image Quality Assessment through FSIM / S. Umme, A. Morium, S. U. Mohammad. – Text : immediate // SSIM, MSE and PSNR-A Comparative Study. – 2019. – 240 c.

References

1. Gonsales R. Digital image processing/ R. Gonsales, R. Woods. – Moscow : Technosphere, 2006. – 1072 c.

2. Understanding Color Models : A Review / N. A. Ibraheem, M. M. Hasan, R. Z. Khan, P. K. Mishra. – Text : immediate // India : ARPN Journal of Science, Technology. – 2012. – Vol. 2, № 3. – C. 265–275.

3. Margulis D. Photoshop for professionals : classic guide to color correction / D. Margulis ; translation from English. – 5th ed. – Moscow : Intelbook, 2007. – 656 c.

4. Umme S. Image Quality Assessment through FSIM / S. Umme, A. Morium, S. U. Mohammad. – Text : immediate // SSIM, MSE and PSNR-A Comparative Study. – 2019. – 240 c.

DOI: 10.58168/OpEq2025_191-196

УДК 517.5

**СВОЙСТВА СМЕШАННЫХ МОДУЛЕЙ ГЛАДКОСТИ ФУНКЦИЙ
С МОНОТОННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ФУРЬЕ**

**PROPERTIES OF MIXED MODULI OF SMOOTHNESS OF FUNCTIONS
WITH MONOTONE FOURIER COEFFICIENTS**

Симонов Алексей Борисович

кандидат экономических наук, доцент,
доцент кафедры информационных систем в экономике
ВолгГТУ, г. Волгоград, Россия

Симонов Борис Витальевич

кандидат физико-математических наук, доцент,
доцент кафедры прикладной математики
ВолгГТУ, г. Волгоград, Россия

Simonov Alexey Borisovich

Candidate of Economic Sciences, Docent, Docent of the Department of
Information Systems in Economics, Volgograd State Technical University,
Volgograd, Russia

Simonov Boris Vital'evich

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Docent, Docent of the
Department of Applied Mathematics, Volgograd State Technical University,
Volgograd, Russia

Аннотация. В работе изучаются взаимосвязи между смешанными модулями гладкости в разных метриках функций с монотонными коэффициентами Фурье.

Abstract. Relations for mixed moduli of smoothness in various metrics for functions with monotone Fourier coefficients are studied in the paper.

Ключевые слова: метрика, смешанный модуль гладкости, монотонные коэффициенты Фурье.

Keywords: metric, mixed moduli of smoothness, monotone Fourier coefficients.

В работе [1] Коляда В.И. доказал неравенство, уточняющее известное неравенство Ульянова П.Л. [2,3]. В работе [4] получено аналогичное неравенство между смешанными модулями гладкости для функций с лакунарными коэффициентами Фурье. В настоящей работе изучается взаимосвязь между смешанными модулями гладкости для функций с монотонными коэффициентами Фурье.

Введем следующие обозначения: $L_p, 1 < p < \infty$, – множество измеримых функций двух переменных $f(x_1, x_2)$, 2π – периодических по каждому

переменному, для которых $\|f\|_p = \left(\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x_1, x_2)|^p dx_1 dx_2 \right)^{1/p} < \infty$;

L_p^0 – множество функций $f \in L_p$ таких, что $\int_0^{2\pi} f(x_1, x_2) dx_2 = 0$ для почти всех x_1 и

$\int_0^{2\pi} f(x_1, x_2) dx_1 = 0$ для почти всех x_2 ;

через $\sigma(f)$ будем обозначать ряд Фурье функции $f(x_1, x_2)$, т.е.

$$\sigma(f) \equiv \sigma(f, x_1, x_2) \equiv \sum_{n_2=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{\infty} (a_{n_1 n_2} \cos n_1 x_1 \cos n_2 x_2 + b_{n_1 n_2} \sin n_1 x_1 \cos n_2 x_2 + c_{n_1 n_2} \cos n_1 x_1 \sin n_2 x_2 +$$

$$+ d_{n_1 n_2} \sin n_1 x_1 \sin n_2 x_2), \text{ где для краткости обозначено } \cos(0 \cdot t) = \frac{1}{2},$$

$$a_{n_1 n_2} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x_1, x_2) \cos n_1 x_1 \cos n_2 x_2 dx_1 dx_2, \quad b_{n_1 n_2} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x_1, x_2) \sin n_1 x_1 \cos n_2 x_2 dx_1 dx_2,$$

$$c_{n_1 n_2} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x_1, x_2) \cos n_1 x_1 \sin n_2 x_2 dx_1 dx_2, \quad d_{n_1 n_2} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x_1, x_2) \sin n_1 x_1 \sin n_2 x_2 dx_1 dx_2 -$$

коэффициенты Фурье функции $f \in L_p$.

Для функции $f \in L_p$ определим разности с шагами h_1 и h_2 положительных порядков α_1 и α_2 соответственно по переменным x_1 и x_2 следующим образом:

$$\Delta_{h_1}^{\alpha_1}(f) = \sum_{n_1=0}^{\infty} (-1)^{n_1} \binom{\alpha_1}{n_1} f(x_1 + (\alpha_1 - n_1)h_1, x_2), \quad \Delta_{h_2}^{\alpha_2}(f) = \sum_{n_2=0}^{\infty} (-1)^{n_2} \binom{\alpha_2}{n_2} f(x_1, x_2 + (\alpha_2 - n_2)h_2),$$

где $\binom{\alpha}{n} = 1$ для $n = 0$, $\binom{\alpha}{n} = \alpha$ для $n = 1$, $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$ для $n \geq 2$.

Обозначим через $\omega_{\alpha_1, \alpha_2}(f, \delta_1, \delta_2)_p$ смешанный модуль гладкости функции $f \in L_p$ положительных порядков α_1 и α_2 соответственно по переменным x_1 и x_2 , т.е.

$$\omega_{\alpha_1, \alpha_2}(f, \delta_1, \delta_2)_p = \sup_{|h_i| \leq \delta_i, i=1,2} \|\Delta_{h_1}^{\alpha_1}(\Delta_{h_2}^{\alpha_2}(f))\|_p.$$

Пусть дана последовательность чисел $\{a_{n_1 n_2}\} = \{a_{n_1 n_2}\}_{n_i=1(i=1,2)}^{\infty}$. Определим разности

$$\begin{aligned} \Delta_{10} a_{n_1 n_2} &= a_{n_1 n_2} - a_{n_1+1 n_2}, & \Delta_{01} a_{n_1 n_2} &= a_{n_1 n_2} - a_{n_1 n_2+1}, \\ \Delta_{11} a_{n_1 n_2} &= \Delta_{10}(\Delta_{01} a_{n_1 n_2}) = a_{n_1 n_2} - a_{n_1+1 n_2} - a_{n_1 n_2+1} + a_{n_1+1 n_2+1}. \end{aligned}$$

Будем говорить, что последовательность $\{a_{n_1 n_2}\}$ монотонна и писать $\{a_{n_1 n_2}\} \in M$, если числа $a_{n_1 n_2}$ удовлетворяют условиям: $a_{n_1 n_2} \rightarrow 0$ при $n_1 \rightarrow \infty$ и любом фиксированном n_2 , $a_{n_1 n_2} \rightarrow 0$ при $n_2 \rightarrow \infty$ и любом фиксированном n_1

(1) и $\Delta_{11} a_{n_1 n_2} \geq 0$ для любых натуральных чисел n_1 и n_2 .

(2)

Отметим, что из справедливости условий (1) и (2) следует, что

$\Delta_{10} a_{n_1 n_2} \geq 0$ и $\Delta_{01} a_{n_1 n_2} \geq 0$, $a_{n_1 m_1} \geq a_{n_2 m_1}$ для $n_1 \leq n_2$ и $a_{n_1 m_1} \geq a_{n_1 m_2}$ для $m_1 \leq m_2$, $a_{n_1 n_2} \geq 0$ для всех $n_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2$.

Будем писать, что $f \in M_p$, если

1) $f \in L_p^0$,

2) функция $f(x_1, x_2)$ имеет ряд Фурье

$$\sigma(f) \equiv \sum_{n_2=1}^{\infty} \sum_{n_1=1}^{\infty} a_{n_1 n_2} \psi_1(n_1 x_1) \psi_2(n_2 x_2),$$

где $\psi_i(t)$ есть $\cos t$ или $\sin t$ ($i = 1, 2$),

3) коэффициенты $a_{n_1 n_2}$ удовлетворяют условиям (1) и (2), т.е. $\{a_{n_1 n_2}\} \in M$.

Заметим, что для $f \in L_p^0$ условие (1) выполнено.

Будем писать, что $f \in \Lambda_p$, если

1) $f \in L_p^0$,

2) функция $f(x_1, x_2)$ имеет ряд Фурье

$$\sigma(f) \equiv \sum_{n_2=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{\infty} a_{n_1 n_2} \psi_1(2^{n_1} x_1) \psi_2(2^{n_2} x_2),$$

где $\psi_i(t)$ есть $\cos t$ или $\sin t$ ($i = 1, 2$).

Для неотрицательных функционалов $F(f, \delta_1, \delta_2)$ и $G(f, \delta_1, \delta_2)$ будем писать, что $F(f, \delta_1, \delta_2) \prec G(f, \delta_1, \delta_2)$, если существует положительная постоянная C , не зависящая от f, δ_1 и δ_2 , такая, что $F(f, \delta_1, \delta_2) \leq C \cdot G(f, \delta_1, \delta_2)$. Если одновременно $F(f, \delta_1, \delta_2) \prec G(f, \delta_1, \delta_2)$ и $G(f, \delta_1, \delta_2) \prec F(f, \delta_1, \delta_2)$, то будем писать $F(f, \delta_1, \delta_2) \approx G(f, \delta_1, \delta_2)$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема. Пусть $f \in M_p, 1 < p < q < \infty, \theta = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}, \alpha_i > \theta, \delta_i \in (0, 1), i = 1, 2$. Тогда,

если

$$\int_0^1 \int_0^1 \left(t_1^{-\theta} t_2^{-\theta} \omega_{\alpha_1, \alpha_2}(f, t_1, t_2)_p \right)^q \frac{dt_1}{t_1} \frac{dt_2}{t_2} < \infty,$$

то $f \in L_q^0$ и

$$\delta_1^{\alpha_1 - \theta} \delta_2^{\alpha_2 - \theta} \left(\int_{\delta_2}^1 \int_{\delta_1}^1 t_1^{-p(\alpha_1 - \theta)} t_2^{-p(\alpha_2 - \theta)} \omega_{\alpha_1, \alpha_2}^p(f, t_1, t_2)_q \frac{dt_1}{t_1} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{1/p} \approx \left(\int_0^{\delta_1} \int_0^{\delta_2} t_1^{-q\theta} t_2^{-q\theta} \omega_{\alpha_1, \alpha_2}^q(f, t_1, t_2)_p \frac{dt_1}{t_1} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{1/q}.$$

Аналогичная теорема для функции одного переменного доказана в работе [5]. Неравенство типа Ульянова для смешанных модулей гладкости установлено в работе [6]. Неравенство типа Коляды для полных модулей гладкости (см. [1], [7,8]). Неравенство типа Ульянова для полных модулей гладкости (см. [9]).

Замечание. В работе [4] для функций с лакунарными коэффициентами, т.е. для $f \in \Lambda_p$, доказано следующее утверждение:

Пусть $f \in \Lambda_p$, $1 < p < q < \infty$, $\theta = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$, $\alpha_i > \theta$, $\delta_i \in (0,1)$, $i = 1,2$. Тогда

$$\delta_1^{\alpha_1 - \theta} \delta_2^{\alpha_2 - \theta} \left(\int_{\delta_2}^1 \int_{\delta_1}^1 t_1^{-p(\alpha_1 - \theta)} t_2^{-p(\alpha_2 - \theta)} \omega_{\alpha_1, \alpha_2}^p(f, t_1, t_2)_q \frac{dt_1}{t_1} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{1/p} < \left(\int_0^{\delta_1} \int_0^{\delta_2} t_1^{-q\theta} t_2^{-q\theta} \omega_{\alpha_1, \alpha_2}^q(f, t_1, t_2)_p \frac{dt_1}{t_1} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{1/q}, \quad (3)$$

причем в соотношении (3) знак $<$ нельзя заменить на знак \approx .

С другой стороны в теореме для функций из M_p левые и правые части соотношения (3) эквивалентны, т.е. знак $<$ заменяется на знак \approx .

Список литературы

1. Коляда В. И. О соотношениях между модулями непрерывности в разных метриках / В. И. Коляда // Тр. Матем. ин-та АН СССР. 1988. Т. 181. С. 117-136.
2. Ульянов П. Л. Вложение некоторых классов функций H_p^ω / П. Л. Ульянов // Изв. АН СССР. Сер. Матем. 1968. Т. 32 С. 649-686.
3. Ульянов П. Л. Теоремы вложения и соотношения между наилучшими приближениями (модулями непрерывности) в разных метриках / П.Л. Ульянов // Матем. сб. 1970. Т. 81 (123). № 1 С. 104-131.
4. Потапов М. К. Усиленное неравенство Ульянова для смешанных модулей гладкости функций с лакунарными коэффициентами Фурье / М. К. Потапов, Б. В. Симонов // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2012. № 1 С. 18-24.
5. Potapov M. K. Relations for moduli of smoothness in various metrics: functions with restrictions on the Fourier coefficients / M. K. Potapov, B. V. Simonov and S. Yu. Tikhonov // Jaen Journal on Approximation. 2009. 1(2) С. 205-222.

6. Потапов М. К. Соотношения между модулями гладкости и теоремы вложения классов Никольского / М. К. Потапов, Б. В. Симонов, С. Ю. Тихонов // Тр. МИАН. 2010. Т. 269 С. 204-214.

7. Trebels W. Inequalities for moduli of smoothness versus embeddings of function spaces / W. Trebels // Arch. Math. 2010. 94 С. 155-164.

8. Kolomoitsev Yu. Hardy-Littlewood and Ulyanov inequalities / Yu. Kolomoitsev, S. Tikhonov // Mem. Amer. Soc. 271(1325) (2021), Arxiv: 1711.08163.

9. Потапов М. К. Дробные модули гладкости / М. К. Потапов, Б. В. Симонов., С. Ю. Тихонов // Москва: МАКС Пресс, 2016.

References

1. Kolyada V. I. On the relations between moduli of continuity in various metrics / V. I. Kolyada // Trudy Mat. Inst. Steklov. 1988. Т. 181. С. 117–136.

2. Ul'janov P. L. The embedding of certain classes H_p^ω of functions / P. L. Ul'janov // Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 1968. 32 С. 649–686.

3. Ul'janov P. L. Imbedding theorems and relations between best approximations (moduli of continuity) in various metrics / P. L. Ul'janov // Mat. Sb. (N.S.) 1970. 81/123 С. 104–131.

4. Potapov M. K. Improvement of the Ulyanov inequality for mixed moduli of smoothness for functions with lacunary Fourier coefficients / M. K. Potapov, B. V. Simonov // Vestnik Moskov. Univ. Mat. Mekh. 2012. No. 1 С. 18–24.

5. Potapov M. K. Relations for moduli of smoothness in various metrics: functions with restrictions on the Fourier coefficients / M. K. Potapov, B. V. Simonov and S. Yu. Tikhonov // Jaen Journal on Approximation. 2009. 1(2) С. 205-222.

6. Potapov M. K. Relations between mixed moduli of smoothness and embedding theorems for the Nikol'skiĭ classes / M. K. Potapov, B. V. Simonov, S. Yu. Tikhonov // Tr. Mat. Inst. Steklova. 2010. N. 269. С. 204–214.

7. Trebels W. Inequalities for moduli of smoothness versus embeddings of function spaces / W. Trebels // Arch. Math. 2010. 94 С. 155-164.

8. Kolomoitsev Yu. Hardy-Littlewood and Ulyanov inequalities / Yu. Kolomoitsev, S. Tikhonov // Mem Amer. Soc. 271(1325) (2021), Arxiv: 1711.08163.

9. Potapov M. K. Fractional Moduli of Smoothness / M. K. Potapov, B. V. Simonov, S. Yu. Tikhonov // Moscow: MAKS Press, 2016.

DOI: 10.58168/OpEq2025_197-205

УДК 517.5

**СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ПОЛНЫМИ МОДУЛЯМИ
ГЛАДКОСТИ В РАЗНЫХ МЕТРИКАХ**
RELATIONS BETWEEN COMPLETE MODULI
OF SMOOTHNESS IN DIFFERENT METRICS

Симонов Борис Витальевич

кандидат физико-математических наук, доцент,

доцент кафедры прикладной математики

ВолгГТУ, г. Волгоград, Россия

Симонова Ирина Эдуардовна

кандидат физико-математических наук, доцент,

доцент кафедры прикладной математики

ВолгГТУ, г. Волгоград, Россия

Simonov Boris Vital'evich

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Docent, Docent of the
Departments of Applied Mathematics, Volgograd State Technical University,

Volgograd, Russia

Simonova Irina Eduardovna

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Docent, Docent of the
Departments of Applied Mathematics, Volgograd State Technical University,

Volgograd, Russia

Аннотация. В статье исследуются функции двух переменных в смешанной метрике. Получены зависимости между полными модулями гладкости функции в одной метрике и полными модулями гладкости исходной функции в другой метрике.

Abstract. Functions of two variables in a mixed metric are investigated in the article. Relationships between the complete moduli of smoothness of the function in one metric and the mixed moduli of smoothness of the original function in another are obtained.

Ключевые слова: смешанная метрика, полный модуль гладкости.

Key words: mixed metric, complete moduli of smoothness.

Введем следующие обозначения: $L_{p_1 p_2}, 1 \leq p_i \leq \infty (i = 1, 2)$ – множество измеримых функций двух переменных $f(x_1, x_2), 2\pi$ – периодических по каждому

переменному, для которых $\|f\|_{p_1 p_2} = \left\| \|f\|_{p_1} \right\|_{p_2} < \infty$, где $\|F\|_{p_i} = \left(\int_0^{2\pi} |F|^{p_i} dx_i \right)^{1/p_i}$, если

$1 \leq p_i < \infty$,

$\|F\|_{p_i} = \sup_{0 \leq x_i \leq 2\pi} |F|$, если $p_i = \infty$;

$L_{p_1 p_2}^0$ – множество функций $f \in L_{p_1 p_2}$ таких, что $\int_0^{2\pi} f(x_1, x_2) dx_2 = 0$ для почти всех x_1 и

$\int_0^{2\pi} f(x_1, x_2) dx_1 = 0$ для почти всех x_2 ;

$\Delta_{h_1, h_2}^\alpha(f)$ – полная разность с шагами h_1 и h_2 положительного порядка α функции

$f \in L_{p_1 p_2}$, т.е. $\Delta_{h_1, h_2}^\alpha(f) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{\alpha}{n} f(x_1 + (\alpha - n)h_1, x_2 + (\alpha - n)h_2)$, где $\binom{\alpha}{n} = 1$ для $n = 0$,

$\binom{\alpha}{n} = \alpha$ для $n = 1$, $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha - 1) \cdots (\alpha - n + 1)}{n!}$ для $n \geq 2$;

$\omega_\alpha(f, \delta)_{p_1 p_2}$ – полный модуль гладкости положительного порядка α функции

$f \in L_{p_1 p_2}$, т.е. $\omega_\alpha(f, \delta)_{p_1 p_2} = \sup_{|h_i| \leq \delta, i=1,2} \left\| \Delta_{h_1, h_2}^\alpha(f) \right\|_{p_1 p_2}$;

$q^* = q$, если $q < \infty$, $q^* = 1$, если $q = \infty$.

Для неотрицательных функционалов $F(f, \delta_1, \delta_2)$ и $G(f, \delta_1, \delta_2)$ будем писать, что $F(f, \delta_1, \delta_2) \prec G(f, \delta_1, \delta_2)$, если существует положительная постоянная C , не зависящая от f, δ_1 и δ_2 , такая, что $F(f, \delta_1, \delta_2) \leq CG(f, \delta_1, \delta_2)$. Если одновременно $F(f, \delta_1, \delta_2) \prec G(f, \delta_1, \delta_2)$ и $G(f, \delta_1, \delta_2) \prec F(f, \delta_1, \delta_2)$, то будем писать $F(f, \delta_1, \delta_2) \approx G(f, \delta_1, \delta_2)$.

Ранее в работах ([1], [2], [3]) получен ряд соотношений между полными модулями гладкости. Пусть $f \in L_{p_1 p_2}^0$, $\alpha > 0$, $\delta \in (0, 1)$. Тогда

а) при $1 = p_1 = p_2 < q_1 = q_2 = \infty$, $\alpha \in \mathbb{N}$

$$\omega_\alpha(f, \delta)_{\infty, \infty} \prec \int_0^\delta t^{-2} \omega_{\alpha+2}(f, t)_{1,1} \frac{dt}{t},$$

б) при $1 < p_i < q_i < \infty$ ($i = 1, 2$), $q = \min(q_1, q_2)$

$$\omega_\alpha(f, \delta)_{q_1 q_2} \prec \left(\int_0^\delta \left(t^{-\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}\right) - \left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2}\right)} \omega_{\alpha + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{q_2}}(f, t)_{p_1, p_2} \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}.$$

В работе [4] приведены более общие соотношения между полными модулями гладкости, из которых следуют перечисленные выше соотношения в пунктах а) и б) при $p_1 = p_2 = p$, $q_1 = q_2 = q$. А именно, имеет место следующая теорема 1.

Теорема 1 ([4], стр. 70). Пусть $f \in L_{pp}$, $1 \leq p < q \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $\alpha > 1 - \frac{1}{q}$, $\gamma \geq 0$, $m \geq 0$,

$\delta \in (0, 1)$. Тогда

$$\omega_\alpha(f, \delta)_{qq} \prec \delta^{-\gamma} \omega_{\alpha+\gamma}(f, \delta)_{pp} \sigma\left(\frac{1}{\delta}\right) + \left(\int_0^\delta \left(t^{-2\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)} \omega_{\alpha+m}(f, t)_{pp} \right)^{q^*} \frac{dt}{t} \right)^{1/q^*}, \quad (1)$$

где

$$\sigma(t) := \begin{cases} 1, & \text{если } \gamma > 2\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right); \\ 1, & \text{если } \gamma = 2\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right), 1 < p < q < \infty; \\ \ln^{\frac{1}{p}}(t+1), & \text{если } \gamma = 2\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) = \frac{2}{p}, 1 < p < q = \infty; \\ 1, & \text{если } \gamma = 2\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \geq 1, \alpha + \gamma \in \mathbb{N}, 1 = p < q \leq \infty; \\ \ln^{\frac{1}{q^*}}(t+1), & \text{если } \gamma = 2\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \geq 1, \alpha + \gamma \notin \mathbb{N}, 1 = p < q \leq \infty; \\ \ln^{\frac{1}{q}}(t+1), & \text{если } \gamma = 2\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) < 1, 1 = p < q \leq \infty; \\ t^{2\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) - \gamma}, & \text{если } 0 \leq \gamma < 2\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right). \end{cases}$$

Замечание 1([4]). Из теоремы 1 при $m = \gamma$ следует неравенство

$$\omega_{\alpha}(f, \delta)_{qq} < \left(\int_0^{\delta} \left(t^{-\gamma} \omega_{\alpha+\gamma}(f, t)_{pp} \sigma\left(\frac{1}{t}\right) \right)^{q^*} \frac{dt}{t} \right)^{1/q^*}.$$

В работе [5] утверждения теорема 1 для случаев, когда $\gamma = \frac{2}{p} - \frac{2}{q}, 1 = p < q < \infty$ или $\gamma = \frac{2}{p} - \frac{2}{q}, 1 < p < q = \infty$, были уточнены при помощи интерполяционного метода. А именно, имеет место следующая теорема 2.

Теорема 2 ([5]). Пусть $f \in L_{pp}, \alpha > 0, \delta \in (0,1)$. Тогда

1) при $1 = p < q < \infty$ справедливо неравенство

$$\omega_{\alpha}(f, \delta)_{qq} < \left(\int_0^{\delta \left(\log_2 \frac{2}{\delta}\right)^{\frac{1}{\alpha q}}} \left(t^{-2\left(1-\frac{1}{q}\right)} \omega_{\alpha+2\left(1-\frac{1}{q}\right)}(f, t)_{1,1} \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}. \quad (2)$$

2) при $1 < p < q = \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, справедливо неравенство

$$\omega_{\alpha}(f, \delta)_{\infty, \infty} < \int_0^{\delta \left(\log_2 \frac{2}{\delta}\right)^{\frac{1}{\alpha p'}}} t^{-\frac{2}{p}} \omega_{\alpha+\frac{2}{p}}(f, t)_{pp} \frac{dt}{t}. \quad (3)$$

В данной работе результаты теорем 1 и 2 уточняются следующим образом.

Теорема 3. Пусть $f \in L_{p_1, p_2}^0$, $1 \leq p_i < q_i \leq \infty$ ($i = 1, 2$), $q = \min(q_1, q_2)$, $q_m = \max(q_1^*, q_2^*)$,

$$\theta = \frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1} + \frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2},$$

$$p_m = \max(p_1, p_2), \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \alpha > 0, m \geq 0, \gamma \geq 0, \psi = \psi(\gamma, p_1, q_1, p_2, q_2) = 1, \text{ если } \gamma > \theta, \text{ и}$$

$$\psi = \psi(p_1, q_1, p_2, q_2) = 0, \text{ если } \gamma \leq \theta, \delta \in (0, 1). \text{ Тогда}$$

$$\begin{aligned} \omega_\alpha(f, \delta)_{q_1, q_2} < \delta^\alpha \left(\int_\delta^{\delta \left(\sigma_1 \left(\frac{1}{\delta} \right)^{\frac{1}{\alpha + \gamma \cdot \psi}} \right)} \left(t^{-\alpha - \theta} \omega_{\alpha + \gamma}(f, t)_{p_1, p_2} \right)^{q_m} \frac{dt}{t} \right)^{1/q_m} + \\ + \left(\delta \left(\sigma_1 \left(\frac{1}{\delta} \right) \right)^{\frac{1 - \psi}{\alpha}} \right)^{-\theta} \omega_{\alpha + \gamma} \left(f, \delta \left(\sigma_1 \left(\frac{1}{\delta} \right) \right)^{\frac{1}{\alpha + \gamma \cdot \psi}} \right)_{p_1, p_2} + \left(\int_0^\delta \left(t^{-\theta} \omega_{\alpha + m}(f, t)_{p_1, p_2} \right)^{q_m} \frac{dt}{t} \right)^{1/q_m}. \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\sigma_1(t) := \begin{cases} t^{\gamma - \theta}, & \text{если } \gamma > \theta; \\ 1, & \text{если } \gamma = \theta, 1 < p_i < q_i \text{ (} i = 1, 2 \text{)}; \\ 1, & \text{если } \gamma = \theta, 1 = p_i < q_i = \infty \text{ (} i = 1, 2 \text{)}, \alpha \in \mathbb{N}; \\ 1, & \text{если } \gamma = \theta, 1 = p_1 = p_2 < q_i < \infty \text{ (} i = 1, 2 \text{)}, 2 \leq q, \alpha + \gamma \in \mathbb{N}; \\ \ln^{1/q}(t+1), & \text{если } \gamma = \theta, 1 = p_1 = p_2 < q_i < \infty \text{ (} i = 1, 2 \text{)}, 2 \leq q, \alpha + \gamma \notin \mathbb{N}; \\ \ln^{1/q_m}(t+1), & \text{если } \gamma = \theta, 1 = p_1 = p_2 < q_i < \infty \text{ (} i = 1, 2 \text{)}, 2 > q; \\ \ln^{1/q_m}(t+1), & \text{если } \gamma = \theta, 1 = p_i < q_i = \infty \text{ (} i = 1, 2 \text{)}, \alpha \notin \mathbb{N}; \\ \ln^{1/q_m}(t+1), & \text{если } \gamma = \theta, 1 < p_1 < q_1 \leq \infty, 1 = p_2 < q_2 \leq \infty; \\ \ln^{1/q_m}(t+1), & \text{если } \gamma = \theta, 1 = p_1 < q_1 = \infty, 1 \leq p_2 < q_2 < \infty; \\ \ln^{1/q_m}(t+1), & \text{если } \gamma = \theta, 1 = p_1 < q_1 < \infty, 1 \leq p_2 < q_2 = \infty; \\ \ln^{1/q_m}(t+1), & \text{если } \gamma = \theta, 1 = p_1 < q_1 < \infty, 1 < p_2 < q_2 < \infty; \\ \ln^{1/q_m}(t+1), & \text{если } \gamma = \theta, 1 = p_1 < q_1 = \infty, 1 < p_2 < q_2 = \infty; \\ \ln^{\min(1/p_2, 1/q_1)}(t+1), & \text{если } \gamma = \theta, 1 < p_1 < q_1 < \infty, 1 < p_2 < q_2 = \infty; \\ \ln^{\min(1/p_1, 1/q_2)}(t+1), & \text{если } \gamma = \theta, 1 < p_1 < q_1 = \infty, 1 < p_2 < q_2 < \infty; \\ \ln^{1/p_m}(t+1), & \text{если } \gamma = \theta, 1 < p_1 < q_1 = \infty, 1 < p_2 < q_2 = \infty; \\ 1, & \text{если } 0 \leq \gamma < \theta. \end{cases}$$

Замечание 2. Из теоремы 3 следует неравенство

$$\omega_\alpha(f, \delta)_{q_1 q_2} < \delta^{-\gamma} \omega_{\alpha+\gamma}(f, \delta)_{p_1 p_2} \sigma_2\left(\frac{1}{\delta}\right) + \left(\int_0^\delta \left(t^{-\theta} \omega_{\alpha+m}(f, t)_{p_1 p_2} \right)^{q_m} \frac{dt}{t} \right)^{1/q_m},$$

а при $m = \gamma$

$$\omega_\alpha(f, \delta)_{q_1 q_2} < \left(\int_0^\delta \left(t^{-\gamma} \omega_{\alpha+\gamma}(f, t)_{p_1 p_2} \sigma_2\left(\frac{1}{t}\right) \right)^{q_m} \frac{dt}{t} \right)^{1/q_m},$$

где функция $\sigma_2(t)$ при $\gamma = \theta$ совпадает с $\sigma_1(t)$, а при $\gamma > \theta$ $\sigma_2(t) \equiv 1$, а при $\gamma < \theta$ $\sigma_2(t) = t^{\theta-\gamma}$.

Замечание 4. Из неравенства (4) следуют (1), (2) и (3).

В теореме 3 при изучении соотношений между полными модулями гладкости рассматривается случай, когда метрика изменяется как по одной переменной, так и по второй переменной. В следующих двух теоремах будут рассмотрены случаи, когда по одной из переменных метрика изменяется, а по оставшейся второй переменной – нет.

Для сокращения записи введем следующие обозначения:

$$\sigma_3^{(i,j)}(t) = \begin{cases} t^{\gamma - \left(\frac{i}{p_i} - \frac{1}{q_i}\right)}, & \text{если } \gamma > \frac{1}{p_i} - \frac{1}{q_i}; \\ 1, & \text{если } 0 \leq \gamma < \frac{1}{p_i} - \frac{1}{q_i}; \\ 1, & \text{если } \gamma = \frac{1}{p_i} - \frac{1}{q_i}, 1 = p_i < q_i = \infty, \alpha \in \mathbf{N}; \\ 1, & \text{если } \gamma = \frac{1}{p_i} - \frac{1}{q_i}, 1 < p_i < q_i < \infty, 1 < p_j < \infty; \\ \ln^{1/q_i^*}(t+1), & \text{если } \gamma = \frac{1}{p_i} - \frac{1}{q_i}, 1 = p_i < q_i \leq \infty; \\ \ln^{1/q_i^*}(t+1), & \text{если } \gamma = \frac{1}{p_i} - \frac{1}{q_i}, 1 < p_i < q_i \leq \infty, p_j = 1 \text{ или } p_j = \infty; \\ \ln^{1/p_i}(t+1), & \text{если } \gamma = \frac{1}{p_i} - \frac{1}{q_i}, 1 < p_i < q_i = \infty, 1 < p_j < \infty; \end{cases}$$

$$\sigma_4^{(i,j)}(t) = \sigma_3^{(i,j)}(t), \text{ если } \gamma = \frac{1}{p_i} - \frac{1}{q_i}; \quad \sigma_4^{(i,j)}(t) = t^{\frac{1}{p_i} - \frac{1}{q_i} - \gamma}, \text{ если } 0 \leq \gamma < \frac{1}{p_i} - \frac{1}{q_i};$$

$$\sigma_4^{(i,j)}(t) = 1, \text{ если } \gamma > \frac{1}{p_i} - \frac{1}{q_i}.$$

Теорема 4. Пусть $f \in L_{p_1 p_2}^0$, $1 \leq p_1 < q_1 \leq \infty$, $1 \leq p_2 \leq \infty$, $\theta = \frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}$, $\alpha > 0$, $\gamma \geq 0$, $m \geq 0$,

$\psi = \psi(\gamma, p_1, q_1) = 1$, если $\gamma > \theta$, и $\psi = \psi(\gamma, p_1, q_1) = 0$, если $\gamma \leq \theta$, $\delta \in (0, 1)$. Тогда

$$\begin{aligned} \omega_\alpha(f, \delta)_{q_1 p_2} &< \delta^\alpha \left(\int_\delta^{\delta \left(\sigma_3^{(1,2)} \left(\frac{1}{\delta} \right)^{\frac{1}{\alpha + \gamma \psi}} \right)} (t^{-\alpha - \theta} \omega_{\alpha + \gamma}(f, t)_{p_1 p_2})^{q_1^*} \frac{dt}{t} \right)^{1/q_1^*} + \\ &+ \left(\delta \left(\sigma_3^{(1,2)} \left(\frac{1}{\delta} \right) \right)^{\frac{1 - \psi}{\alpha}} \right)^{-\theta} \omega_{\alpha + \gamma} \left(f, \delta \left(\sigma_3^{(1,2)} \left(\frac{1}{\delta} \right) \right)^{\frac{1}{\alpha + \gamma \psi}} \right)_{p_1 p_2} + \left(\int_0^\delta (t^{-\theta} \omega_{\alpha + m}(f, t)_{p_1 p_2})^{q_1^*} \frac{dt}{t} \right)^{1/q_1^*} < \\ &< \delta^{-\gamma} \omega_{\alpha + \gamma}(f, \delta)_{p_1 p_2} \sigma_4^{(1,2)} \left(\frac{1}{\delta} \right) + \left(\int_0^\delta (t^{-\theta} \omega_{\alpha + m}(f, t)_{p_1 p_2})^{q_1^*} \frac{dt}{t} \right)^{1/q_1^*}. \end{aligned}$$

Замечание 5. Если дополнительно $m = \gamma$, то

$$\omega_\alpha(f, \delta)_{q_1 p_2} < \left(\int_0^\delta (t^{-\gamma} \omega_{\alpha + \gamma}(f, t)_{p_1 p_2} \sigma_4^{(1,2)} \left(\frac{1}{t} \right))^{q_1^*} \frac{dt}{t} \right)^{1/q_1^*}.$$

Теорема 5. Пусть $f \in L_{p_1 p_2}^0$, $1 \leq p_2 < q_2 \leq \infty$, $1 \leq p_1 \leq \infty$, $\theta = \frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2}$, $\alpha > 0$, $\gamma \geq 0$, $m \geq 0$,

$\psi = \psi(\gamma, p_2, q_2) = 1$, если $\gamma > \theta$, и $\psi = \psi(\gamma, p_2, q_2) = 0$, если $\gamma \leq \theta$, $\delta \in (0, 1)$. Тогда

$$\begin{aligned} \omega_\alpha(f, \delta)_{p_1 q_2} &< \delta^\alpha \left(\int_\delta^{\delta \left(\sigma_3^{(2,1)} \left(\frac{1}{\delta} \right)^{\frac{1}{\alpha + \gamma \psi}} \right)} (t^{-\alpha - \theta} \omega_{\alpha + \gamma}(f, t)_{p_1 p_2})^{q_2^*} \frac{dt}{t} \right)^{1/q_2^*} + \\ &+ \left(\delta \left(\sigma_3^{(2,1)} \left(\frac{1}{\delta} \right) \right)^{\frac{1 - \psi}{\alpha}} \right)^{-\theta} \omega_{\alpha + \gamma} \left(f, \delta \left(\sigma_3^{(2,1)} \left(\frac{1}{\delta} \right) \right)^{\frac{1}{\alpha + \gamma \psi}} \right)_{p_1 p_2} + \left(\int_0^\delta (t^{-\theta} \omega_{\alpha + m}(f, t)_{p_1 p_2})^{q_2^*} \frac{dt}{t} \right)^{1/q_2^*} < \\ &< \delta^{-\gamma} \omega_{\alpha + \gamma}(f, \delta)_{p_1 p_2} \sigma_4^{(2,1)} \left(\frac{1}{\delta} \right) + \left(\int_0^\delta (t^{-\theta} \omega_{\alpha + m}(f, t)_{p_1 p_2})^{q_2^*} \frac{dt}{t} \right)^{1/q_2^*}. \end{aligned}$$

Замечание 6. Если дополнительно $m = \gamma$, то

$$\omega_{\alpha}(f, \delta)_{p_1 q_2} \prec \left(\int_0^{\delta} \left(t^{-\gamma} \omega_{\alpha+\gamma}(f, t)_{p_1 p_2} \sigma_4^{(2,1)} \left(\frac{1}{t} \right) \right)^{q_2^*} \frac{dt}{t} \right)^{1/q_2^*}.$$

Замечание 7. Пусть $2 \leq q_i < \infty$, $\theta_i = 1 - \frac{1}{q_i}$ ($i = 1, 2$), $\alpha > 0$, $\alpha + \theta_1 + \theta_2 \in \mathbb{N}$. Тогда из теоремы 3 следует неравенство

$$\omega_{\alpha}(f, \delta)_{q_1, q_2} \prec \left(\int_0^{\delta} \left(t^{-\theta_1 - \theta_2} \omega_{\alpha + \theta_1 + \theta_2}(f, t)_{1,1} \right)^{q_m} \frac{dt}{t} \right)^{1/q_m}.$$

При $q_1 = q_2 = q$ из этого неравенства следует неравенство из теоремы 1. Для функции одной переменной аналогичное неравенство не имеет места.

Список литературы

1. Потапов М. К. Связь между полными модулями гладкости в метриках L_1 и L_{∞} / М. К. Потапов, Б. В. Симонов // Вестн. Моск. ун-та, сер. 1, Математика. Механика. 2016. № 1 С. 16-24.
2. Потапов М. К. Усиленное неравенство Ульянова для полных модулей гладкости функций из пространств со смешанной метрикой / М.К. Потапов, Б. В. Симонов // Вестн. Моск. ун-та, сер. 1, Математика. Механика. 2018. № 6 С. 8-20.
3. Потапов М. К. Дробные модули гладкости / М. К. Потапов, Б. В. Симонов, С. Ю. Тихонов // Москва: МАКС Пресс, 2016.
4. Kolomoitsev Yu. Hardy-Littlewood and Ulyanov inequalities / Yu. Kolomoitsev, S. Tikhonov // Mem Amer. Soc. 271(1325) (2021), Arxiv: 1711.08163.

5. Domingues O. Embedding of smooth function spaces extrapolations, and related inequalities / O. Domingues, S. Tikhonov // ArXiv: 1909.12818v2 [math.FA] \ 22 \ Nov \ 2019 C. 1-71.

References

1. Potapov M. K. Interrelations between full moduli of smoothness in the metrics of L_1 and L_∞ / M. K. Potapov, B. V. Simonov // Univ. Ser. I Mat. Mekh. 2016. No. 1 C. 15–22.

2. Potapov M. K. Strengthened Ul'yanov's inequality for complete moduli of smoothness of functions from spaces with mixed metrics / M. K. Potapov, B. V. Simonov // Univ. Ser. I Mat. Mekh. 2018. No. 6 C. 8 - 20.

3. Potapov M. K. Fractional Moduli of Smoothness / M. K. Potapov, B. V. Simonov, S. Yu. Tikhonov // Moscow: MAKS Press, 2016.

4. Kolomoitsev Yu. Hardy-Littlewood and Ulyanov inequalities / Yu. Kolomoitsev, S. Tikhonov // Mem Amer. Soc. 271(1325) (2021), Arxiv: 1711.08163.

5. Domingues O. Embedding of smooth function spaces extrapolations, and related inequalities / O. Domingues, S. Tikhonov // ArXiv: 1909.12818v2 [math.FA] \ 22 \ Nov \ 2019 C. 1-71.

DOI: 10.58168/OpEq2025_206-211

УДК 517.5

**УТОЧНЕНИЕ СООТНОШЕНИЙ МЕЖДУ МОДУЛЯМИ ГЛАДКОСТИ
В РАЗНЫХ МЕТРИКАХ**

IMPROVEMENT OF INTERRELATIONS BETWEEN MODULI OF
SMOOTHNESS IN DIFFERENT METRICS

Симонова Ирина Эдуардовна

кандидат физико-математических наук, доцент,
доцент кафедры прикладной математики, ВолгГТУ, г. Волгоград, Россия

Иголина Татьяна Романовна

кандидат физико-математических наук, доцент,
доцент кафедры высшей математики ИИИ, РТУ МИРЭА, г. Москва, Россия

Симонов Борис Витальевич

кандидат физико-математических наук, доцент,
доцент кафедры прикладной математики, ВолгГТУ, г. Волгоград, Россия

Simonova Irina Eduardovna

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Docent, Docent of the
Departments of Applied Mathematics, Volgograd State Technical University,
Volgograd, Russia

Igonina Tatyana Romanovna

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Docent, Docent of the Department
of Higher Mathematics, III RTU MIREA, Moscow, Russia

Simonov Boris Vital'evich

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Docent, Docent of the
Departments of Applied Mathematics, Volgograd State Technical University,
Volgograd, Russia

Аннотация. В статье рассматриваются функции одной переменной. Устанавливаются взаимосвязи между модулями гладкости в разных метриках, уточняющие известные ранее оценки.

Abstract. Functions of one variable are considered in the article. The relationships between smoothness moduli in different metrics are established, refining previously known estimates.

Ключевые слова: модуль гладкости, метрика.

Keywords: moduli of smoothness, metric.

Введем следующие обозначения: $L_p, 1 \leq p \leq \infty$ – множество измеримых 2π – периодических функций $f(x)$ одной переменной, для которых $\|f\|_p < \infty$, где

$$\|f\|_p = \left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \text{ если } 1 \leq p < \infty, \quad \|f\|_p = \sup_{0 \leq x \leq 2\pi} |f(x)|, \text{ если } p = \infty;$$

L_p^0 – множество функций $f \in L_p, 1 \leq p \leq \infty$, таких, что $\int_0^{2\pi} |f(x)| dx = 0$;

$\omega_\alpha(f, t)_p$ – модуль гладкости функции $f \in L_p$ порядка $\alpha (\alpha > 0)$ в метрике L_p , т.е.

$$\omega_\alpha(f, t)_p = \sup_{|h| \leq t} \left\| \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \binom{\alpha}{m} f(x + (\alpha - m)h) \right\|_p,$$

где $\binom{\alpha}{m} = 1$ для $m = 0$, $\binom{\alpha}{m} = \alpha$ для $m = 1$, $\binom{\alpha}{m} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-m+1)}{m!}$ для $m \geq 2$;

$q^* = q$, если $q < \infty$, $q^* = 1$, если $q = \infty$.

Для неотрицательных функционалов $F(f, \delta)$ и $G(f, \delta)$ будем писать, что $F(f, \delta) \prec G(f, \delta)$, если существует положительная постоянная C , не зависящая от f и δ , такая, что $F(f, \delta) \leq CG(f, \delta)$. Если одновременно $F(f, \delta) \prec G(f, \delta)$ и $G(f, \delta) \prec F(f, \delta)$, то будем писать $F(f, \delta) \approx G(f, \delta)$.

Известны ([1]-[3]) следующие соотношения между модулями гладкости:

Пусть $f \in L_p^0, \alpha > 0, \delta \in (0,1)$. Тогда а) при $1 < p < q < \infty$

$$\omega_\alpha(f, \delta)_q \prec \left(\int_0^\delta \left(t^{-\frac{1}{p} + \frac{1}{q}} \omega_{\alpha + \frac{1}{p} - \frac{1}{q}}(f, t)_p \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q},$$

б) при $1 = p < q = \infty$

$$\omega_\alpha(f, \delta)_q \prec \int_0^\delta t^{-1} \omega_{\alpha+1}(f, t)_p \frac{dt}{t},$$

в) при $1 = p < q < \infty$

$$\omega_\alpha(f, \delta)_q \prec \left(\int_0^\delta \left(t^{-\frac{1}{p} + \frac{1}{q}} \omega_{\alpha + \frac{1}{p} - \frac{1}{q}}(f, t)_p \right)^q \log_2 \frac{2}{t} \frac{dt}{t} \right)^{1/q},$$

г) при $1 < p < q = \infty$

$$\omega_\alpha(f, \delta)_q \prec \int_0^\delta t^{-\frac{1}{p}} \omega_{\alpha + \frac{1}{p}}(f, t)_p \left(\log_2 \frac{2}{t} \right)^{1 - \frac{1}{p}} \frac{dt}{t}.$$

В работе [4] приведены более общие соотношения между модулями гладкости, из которых следуют перечисленные выше соотношения из пунктов а), б), в) и г). А именно, имеет место следующая теорема 1.

Теорема 1 ([4], стр. 67). Пусть $f \in L_p, 1 \leq p < q \leq \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \alpha > 0, \gamma \geq 0, m \geq 0,$

$\delta \in (0,1)$. Тогда

$$\omega_\alpha(f, \delta)_q \prec \delta^{-\gamma} \omega_{\alpha+\gamma}(f, \delta)_p \sigma\left(\frac{1}{\delta}\right) + \left(\int_0^\delta \left(t^{-\frac{1}{p} + \frac{1}{q}} \omega_{\alpha+m}(f, t)_p \right)^{q^*} \frac{dt}{t} \right)^{1/q^*}, \quad (1)$$

где

$$\sigma(t) := \begin{cases} 1, & \text{если } \gamma > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}, \\ 1, & \text{если } \gamma = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}, 1 < p < q < \infty, \\ \ln^{\frac{1}{p'}}(t+1), & \text{если } \gamma = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}, 1 < p < q = \infty, \\ \ln^{\frac{1}{q}}(t+1), & \text{если } \gamma = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}, 1 = p < q \leq \infty, \\ t^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q} - \gamma}, & \text{если } 0 \leq \gamma < \frac{1}{p} - \frac{1}{q}. \end{cases}$$

Замечание 1 ([4]). Из теоремы 1 при $m = \gamma$ следует неравенство

$$\omega_\alpha(f, \delta)_q < \left(\int_0^\delta \left(t^{-\gamma} \omega_{\alpha+\gamma}(f, t)_p \sigma\left(\frac{1}{t}\right) \right)^{q^*} \frac{dt}{t} \right)^{1/q^*}.$$

В работе [5] утверждения в) и г), а также теорема 1 в случаях, когда $\gamma = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}, 1 = p < q < \infty$ или $\gamma = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}, 1 < p < q = \infty$, были уточнены при помощи интерполяционного метода. А именно, имеет место следующая теорема 2.

Теорема 2 ([5]). Пусть $f \in L_p, \alpha > 0, \delta \in (0,1)$. Тогда

1) при $1 = p < q < \infty$ справедливо неравенство

$$\omega_\alpha(f, \delta)_q < \left(\int_0^{\delta \left(\log_2 \frac{2}{\delta} \right)^{\frac{1}{\alpha q}}} \left(t^{-1 + \frac{1}{q}} \omega_{\alpha + \frac{1}{q}}(f, t)_1 \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}. \quad (2)$$

2) при $1 < p < q = \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, справедливо неравенство

$$\omega_\alpha(f, \delta)_\infty < \int_0^{\delta \left(\log_2 \frac{2}{\delta} \right)^{\frac{1}{\alpha p'}}} t^{-\frac{1}{p}} \omega_{\alpha + \frac{1}{p}}(f, t)_p \frac{dt}{t}. \quad (3)$$

В данной работе результаты теорем 1 и 2 уточняются следующим образом.

Теорема 3. Пусть $f \in L_p^0$, $1 \leq p < q \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $\alpha > 0$, $\theta = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$, $\gamma \geq 0$, $m \geq 0$, $\delta \in (0,1)$, $\psi = \psi(\gamma, p, q) = 1$, если $\gamma > \theta$ и $\psi = \psi(\gamma, p, q) = 0$, если $\gamma \leq \theta$. Тогда

$$\omega_\alpha(f, \delta)_q < \delta^\alpha \left(\int_\delta^1 \left(t^{-\alpha - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}} \omega_{\alpha+\gamma}(f, t)_p \right)^{q^*} \frac{dt}{t} \right)^{1/q^*} + \left(\delta \left(\sigma_1 \left(\frac{1}{\delta} \right) \right)^{\frac{1-\psi}{\alpha}} \right)^{-\theta} \omega_{\alpha+\gamma} \left(f, \delta \left(\sigma_1 \left(\frac{1}{\delta} \right) \right)^{\frac{1}{\alpha+\gamma\psi}} \right)_p + \left(\int_0^\delta \left(t^{-\theta} \omega_{\alpha+m}(f, t)_p \right)^{q^*} \frac{dt}{t} \right)^{1/q^*}, \quad (4)$$

где функция $\sigma_1(t)$ при $\gamma = \theta$ совпадает с $\sigma(t)$ из теоремы 1, а при $\gamma > \theta$ $\sigma_1(t) \equiv 1$, а при $\gamma < \theta$ функция $\sigma_1(t) = t^{\theta-\gamma}$.

Замечание 2. В работе [5] неравенства (2) и (3) были доказаны при помощи интерполяционного метода. В работе [6] неравенства (2) и (3) были доказаны другим методом. В данной работе при доказательстве теоремы 3 использован метод, предложенный при доказательстве неравенств (2) и (3) в работе [6].

Замечание 3. Если $\gamma > \theta$, то

$$\delta^\alpha \left(\int_\delta^1 \left(t^{-\alpha - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}} \omega_{\alpha+\gamma}(f, t)_p \right)^{q^*} \frac{dt}{t} \right)^{1/q^*} + \left(\delta \left(\sigma_1 \left(\frac{1}{\delta} \right) \right)^{\frac{1-\psi}{\alpha}} \right)^{-\theta} \omega_{\alpha+\gamma} \left(f, \delta \left(\sigma_1 \left(\frac{1}{\delta} \right) \right)^{\frac{1}{\alpha+\gamma\psi}} \right)_p \approx \delta^{-\theta} \omega_{\alpha+\gamma} \left(f, \delta \left(\sigma_1 \left(\frac{1}{\delta} \right) \right)^{\frac{1}{\alpha+\gamma}} \right)_p.$$

Замечание 4. Из неравенства (4) следуют оценки (1), (2) и (3).

Список литературы

1. Потапов М. К. О соотношениях между модулями гладкости в разных метриках / М. К. Потапов, Б. В. Симонов, С. Ю. Тихонов // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2009. № 3. С. 17-25.
2. Tikhonov S. Ulyanov inequalities and generalized Liouville derivatives / S. Tikhonov, W. Trebels // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. 2011. 141. No. 1. P. 205-224.

3. Tikhonov S. Weak type inequalities for moduli of smoothness: the case of limit value parameters / S. Tikhonov // J. Fourier Anal. Appl. 2010. 16. No. 4. P. 590-608.

4. Kolomoitsev Yu. Hardy-Littlewood and Ulyanov inequalities / Yu. Kolomoitsev, S. Tikhonov // Mem Amer. Soc. 271(1325) (2021), Arxiv: 1711.08163.

5. Domingues O. Embedding of smooth function spaces extrapolations, and related inequalities / O. Domingues, S. Tikhonov // ArXiv: 1909.12818v2 [math.FA] \setminus 22 \setminus Nov \setminus 2019 \text{ C. } 1-71.

6. Потапов М. К. Уточнение соотношений между модулями гладкости / М. К. Потапов, Б. В. Симонов // Вестн. Моск. ун-та, сер. 1, Математика. Механика. 2023. № 2. С. 11-23.

References

1. Potapov M. K. Relations between moduli of smoothness in different metrics / M. K. Potapov, B. V. Simonov, S. Yu. Tikhonov // Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh. 2009. No. 3. P. 17–25.

2. Tikhonov S. Ulyanov inequalities and generalized Liouville derivatives / S. Tikhonov, W. Trebels // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. 2011. 141. No. 1. P. 205-224.

3. Tikhonov S. Weak type inequalities for moduli of smoothness: the case of limit value parameters / S. Tikhonov // J. Fourier Anal. Appl. 2010. 16. No. 4. P. 590-608.

4. Kolomoitsev Yu. Hardy-Littlewood and Ulyanov inequalities / Yu. Kolomoitsev, S. Tikhonov // Mem Amer. Soc. 271(1325) (2021), Arxiv: 1711.08163.

5. Domingues O. Embedding of smooth function spaces extrapolations, and related inequalities / O. Domingues, S. Tikhonov // ArXiv: 1909.12818v2 [math.FA] \setminus 22 \setminus Nov \setminus 2019 \text{ C. } 1-71.

6. Potapov M. K. Improvements of interrelations between moduli of smoothness / M. K. Potapov, B. V. Simonov // Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh. 2023. No. 2 P. 11–23.

DOI: 10.58168/OpEq2025_212-217

УДК 536.12

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРОДИНАМИКИ ВОЗДУШНЫХ ПОТОКОВ
В ГАЗОВОЙ ПРОМЫШЛЕННОЙ ПЕЧИ ДЛЯ ОЦЕНКИ
ТЕМПЕРАТУРНОГО ПРОФИЛЯ ПОВЕРХНОСТИ ОБЪЕКТА**
MODELING OF AIR FLOW HYDRODYNAMICS IN A GAS INDUSTRIAL
FURNACE TO ASSESS THE TEMPERATURE PROFILE OF AN OBJECT'S
SURFACE

Слободин Александр Дмитриевич

аспирант кафедры технологии сварочного производства и диагностики ВГТУ,
г. Воронеж, Россия

Селиванов Владимир Фёдорович

Доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой технологии
сварочного производства и диагностики ВГТУ, г. Воронеж, Россия

Иванов Андрей Валентинович

доцент кафедры автоматизированных систем управления процессами и
производствами ВГУИТ, г. Воронеж, Россия

Хвостов Анатолий Анатольевич

Доктор технических наук, профессор кафедры прикладной математики и
механики ВГТУ, г. Воронеж, Россия

Slobodin Aleksandr Dmitrievich

postgraduate student of the department of welding production technology and
diagnostics Voronezh state technical university, Voronezh, Russia

Selivanov Vladimir Fyodorovich

Doctor of technical sciences, professor, head of department of welding production
technology and diagnostics Voronezh state technical university, Voronezh, Russia

Ivanov Andrey Valentinovich

Candidate of technical sciences, associate professor at department of automated process and production control systems, Voronezh state university of engineering technologies, Voronezh, Russia

Khvostov Anatoly Anatolyevich

Doctor of technical sciences, professor of department of applied mathematics and mechanics Voronezh state technical university, Voronezh, Russia

Аннотация. В статье рассмотрен вопрос математического моделирования гидродинамики воздушных потоков в газовой печи с учетом расположения, геометрических и напорно-расходных параметров газовых форсунок, расположения и параметров вентиляционного отверстия, а также формы, размеров, положения и материала помещенного в печь объекта. Математическая модель используется для оценки влияния вышеперечисленных параметров на температурное поле поверхности объекта и вызванную этим неравномерность его прогрева.

Abstract. The article examines the issue of mathematical modeling of air flow hydrodynamics in a gas furnace, taking into account the location and geometric and pressure-flow parameters of gas nozzles, the location and parameters of the ventilation opening, as well as the shape, size, position and material of the object placed in the furnace. The mathematical model is used to assess the influence of the above parameters on the temperature field of the object's surface and the resulting unevenness of its heating.

Ключевые слова: математическое моделирование, термоконвекция.

Key words: mathematical modeling, thermal convection.

Технологические процессы, включающие в себя стадии нагрева полуфабриката или готового продукта в газовых конвекционных печах широко используются в машиностроении, металлургии и пищевой промышленности.

Методики расчета времени прогрева, необходимого для достижения заданных технологией температурных полей в объекте, базируются на тепловом балансе тепловых потоков (поступающих в печь, отраженных от изделия, отводимых из зоны нагрева и затраченных на нагрев изделия и окружающей среды [1]). В расчетах обычно фигурирует средняя температура изделия или температура отдельной зоны нагрева [1]. Однако, такие методики не учитывают сложную термическую картину, стратификацию и «мёртвые» зоны, возникающие в процессе термоконвективного нагрева [2].

Для принятия решения о применимости конкретной расчетной методики предлагается использовать сопряженную модель внутреннего пространства печи и расположенного в ней нагреваемого объекта, формализующую газодинамические и тепловые потоки с учетом геометрических параметров системы (рис. 1).

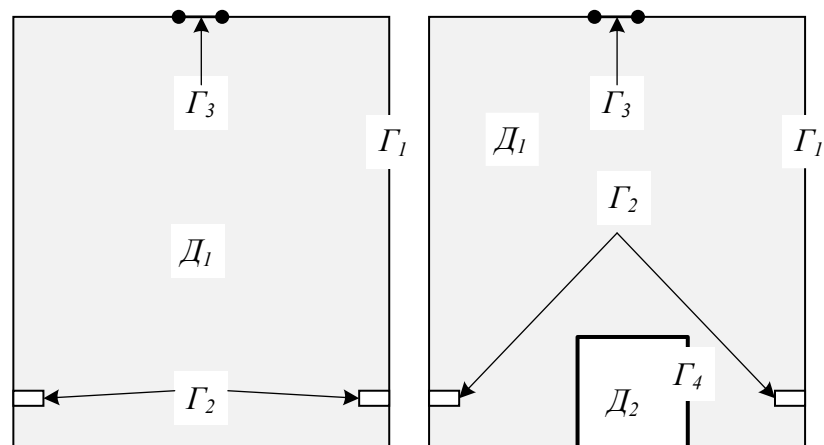


Рис. 1 Расчетные схемы

Для оценки пространственной динамики потоков рассмотрены схемы с объектом квадратного сечения, расположенным в печи и без него (рис. 1).

Уравнения сохранения импульса, энергии, массы [3]

$$\left\{ \begin{array}{l} D_1: \rho \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \rho (\bar{u} \cdot \nabla) \bar{u} = \nabla \cdot \left\{ -p + \mu \left[\nabla \bar{u} + (\nabla \bar{u})^T \right] \right\} + \rho \bar{g}; \\ \nabla \cdot (\rho \bar{u}) = 0; \\ \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_p \bar{u} \cdot \nabla T = \nabla \cdot (\lambda \nabla T); \\ D_2: \rho^* c_p^* \frac{\partial T^*}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda^* \nabla T^*); \end{array} \right. \quad (1)$$

где D_1 – домен воздушного пространства печи, D_2 – домен объекта, \bar{u} – скорость, м/с; p – давление, Па; t – время, с; μ – динамическая вязкость, Па·с; \bar{g} – ускорение свободного падения, м/с²; ρ, ρ^* – плотность, кг/м³; T, T^* – температура, К; c_p, c_p^* – удельная теплоемкость, Дж/(кг·К); λ, λ^* – коэффициент теплопроводности воздуха и объекта (индекс *), Дж/(с·м²·К). Начальные условия $\bar{u}|_{t=0} = 0$,

$p|_{t=0} = p_0, T|_{t=0} = T^*|_{t=0} = T_0$. Граничные условия на Γ_1 : $-\lambda \frac{\partial T}{\partial \bar{n}} = \alpha(T - T_{oc}), \bar{u} = 0$;

Γ_2 : $T = T_{ex}, \bar{n} \cdot \bar{u} = u_{ex}$; Γ_3 : $T = T_0, p = 0$; Γ_4 : $T = T^*, \frac{\partial T}{\partial \bar{n}} = \frac{\partial T^*}{\partial \bar{n}}, \bar{u} = 0$, где p_0, T_0 –

начальные значения давления, температуры, α – коэффициент теплоотдачи к воздуху окружающей среды, Вт/(м²·К); \bar{n} – единичный вектор нормали к поверхности; T_{oc} – температура окружающей среды, К.

Вычислительный эксперимент проведен на примере печи ТХМ-ДО-50.130.30/1100 и заключался непрерывной подаче горячего воздуха в объём печи. Система (1) решена численно методом конечных элементов в Comsol Multiphysics. В качестве модельных сред использованы воздух и сталь. Результатами моделирования представлены на (рис. 2).

Разработанная модель может быть использована для исследования пространственной динамики нагрева воздуха в печи и в объекте.

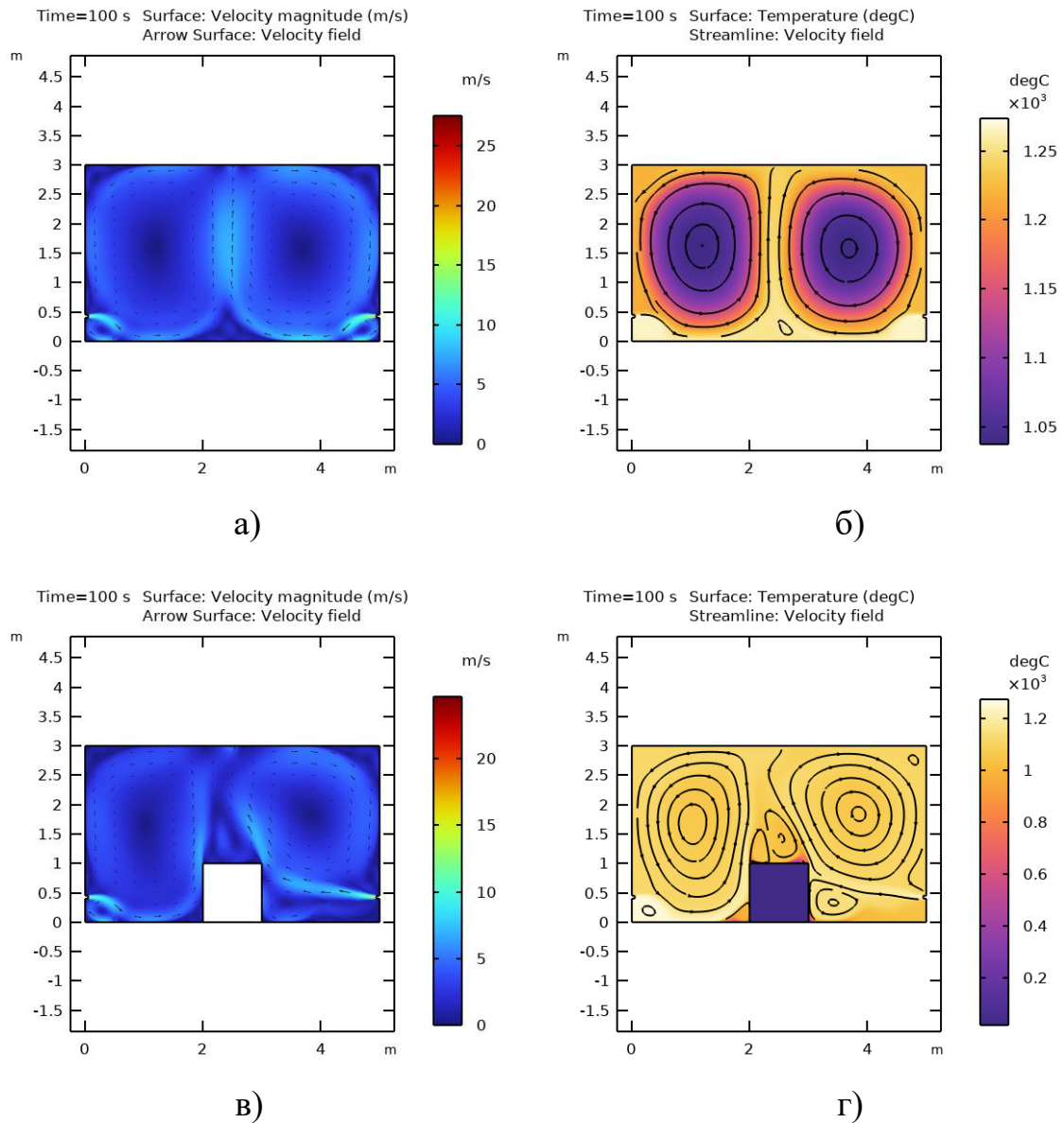


Рис. 2 Температурные и тепловые поля

Список литературы

1. Расчёт нагревательных и термических печей: Справ. Изд. Под ред. Тымчака В.М. и Гусовского В.Л. Авт.: Василькова С.Б., Генкина М.М., Гусовский В.Л., Лифшиц А.Е., Масалович В.Г., Перимов А.А., Спивак Э.И., Тымчак В.М. М.: Металлургия, 1983. 480 с.

2. Гетлинг А.В. Конвекция Рэля-Бенара. Структуры и динамика М.: Эдиториал УРСС, 1999. — 248 с.

3. Конвекция и тепловые волны Лыков А.В., Берковский Б.М. М.: Энергия, 1974 – 336 с.

References

1. Calculation of heating and thermal furnaces: Reference Edition by Tymchak V.M. and Gusovsky V.L. Authors: Vasilkova S.B., Genkina M.M., Gusovsky V.L., Lifshits A.E., Masalovich V.G., Perimov A.A., Spivak E.I., Tymchak V.M. М.: Metallurgia, 1983. 480 p.

2. Getling A.V. Rayleigh-Benard convection. Structures and dynamics М.: Editorial URSS, 1999. - 248 p.

3. Convection and heat waves Lykov A.V., Berkovsky B.M. Moscow: Energy, 1974 – 336 p.

DOI: 10.58168/OpEq2025_218-224

УДК 519.21

**ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ КРИТЕРИЙ ПЕРКОЛЯЦИИ И ОБОБЩЕНИЕ
ТЕОРЕМЫ ХАРРИСА–КЕСТЕНА**

TOPOLOGICAL PERCOLATION CRITERION AND GENERALIZATION OF
THE HARRIS–KESTEN THEOREM

Солонченко Роман Евгеньевич

аспирант, кафедра программного обеспечения вычислительной техники и
автоматизированных систем, Белгородский государственный технологический
университет им. В.Г. Шухова, г. Белгород, Россия

Solonchenko Roman Evgenievich

Postgraduate Student, Department of Computer Engineering and Automated Systems
Software, Belgorod State Technological University named after V.G. Shukhov,
Belgorod, Russia

Аннотация. В статье предложен новый топологический критерий перколяции для планарных графов, позволяющий описать появление бесконечного кластера через геометрические свойства конфигураций. С использованием данного критерия доказано обобщение теоремы Харриса–Кестена о критической вероятности на более широкий класс перколяционных моделей.

Abstract. The article proposes a new topological criterion of percolation on planar graphs, which characterizes the emergence of an infinite cluster through the geometry of configurations. Using this criterion, a generalization of the Harris–Kesten theorem for a broader class of models is proved.

Ключевые слова: перколяция, бесконечный кластер, критическая вероятность, топология, двойственный граф.

Keywords: percolation, infinite cluster, critical probability, topology, dual graph.

Введение

Перколяция – одна из фундаментальных моделей вероятностной теории фазовых переходов. Она была впервые предложена в работе С. Р. Бродбента и Дж. М. Хаммерсли, где исследовалось распространение жидкости через случайную среду [1]. В классической постановке рассматривается бесконечная решётка (например, квадратная решётка) со случайно «включёнными» элементами (рёбрами или вершинами). Каждое ребро решётки может быть открытым (проводящим) с вероятностью p или закрытым с вероятностью $1-p$ независимо друг от друга. При достаточно больших p возникает сквозной кластер, соединяющий отдалённые области решётки, что интерпретируется как протекание («перколяция») через систему [1]. С другой стороны, при малых p кластеры остаются ограниченными, и глобальной связи не возникает.

Важнейшая характеристика такой системы – критическая вероятность p_c , разделяющая режимы отсутствия и наличия бесконечного кластера. Для $p < p_c$ перколяция почти наверняка отсутствует (все кластеры конечны), тогда как для $p > p_c$ с ненулевой вероятностью существует бесконечный кластер. Классическая теорема Харриса–Кестена утверждает, что для независимой рёберной перколяции на бесконечной квадратной решётке критическая вероятность равна $p_c = \frac{1}{2}$ [2, 3]. Иными словами, если каждое ребро, проводящее с вероятностью 50%, то почти наверняка бесконечного проводящего кластера не возникает, а вот при любой большей вероятности сквозной кластер появляется с ненулевой вероятностью. Это фундаментальный результат для двумерных перколяционных моделей.

Следует отметить, что значение $p_c = \frac{1}{2}$ является специфическим для строго симметричных решёток. Для иных решёток или типов перколяции критическая

вероятность, как правило, отличается от $1/2$. В таблице 1 приведены известные значения p_c для некоторых моделей перколяции на планарных решётках [3, 4].

Таблица 1 – Критические значения вероятности перколяции для некоторых бесконечных решёток

Решётка	Тип перколяции	p_c
Квадратная Z^2	рёберная (bond)	0.5
Квадратная Z^2	вершинная (site)	≈ 0.5927
Треугольная	вершинная (site)	0.5
Треугольная	рёберная (bond)	≈ 0.3473
Шестиугольная	вершинная (site)	≈ 0.697

Как видно из таблицы 1, значение критической вероятности существенно зависит от структуры решётки и вида перколяции. Естественным является вопрос: для каких структур сетей критическая вероятность равна 0,5? Другими словами, можно ли указать общий критерий, при выполнении которого появляется «самодвойственная» симметрия, приводящая к $p_c = \frac{1}{2}$?

В данной работе сформулирован топологический критерий перколяции, отвечающий на этот вопрос для широкого класса планарных графов. На основе этого критерия мы доказываем обобщённую теорему Харриса–Кестена о значении p_c и показываем, что несколько известных результатов (например, для квадратной и треугольной решёток) укладываются в единый теоретический каркас.

Топологический критерий перколяции

Рассмотрим независимую перколяционную модель на бесконечном планарном графе G . Будем говорить об открытых и закрытых рёбрах в соответствии с их состоянием (проводящее или нет). Под *кластером* понимается максимальное связное множество смежных по G открытых рёбер (или вершин, в случае вершинной перколяции). Бесконечный кластер – это кластер,

содержащий бесконечно много вершин графа. Событие перколяции означает существование хотя бы одного бесконечного кластера в конфигурации.

Для планарных графов справедливо следующее утверждение, связывающее существование бесконечного кластера с геометрическими (топологическими) свойствами конфигурации открытых и закрытых рёбер.

Лемма 1 (топологический критерий перколяции). Пусть G – планарный граф, и рассматривается модель независимой перколяции на рёбрах графа. Обозначим через G^* граф, планарно двойственный к G . Тогда верна эквивалентность событий:

- происходит бесконечная перколяция на G (существует бесконечный открытый кластер);
- во всех достаточно больших циклах (замкнутых контурах) графа G^* по крайней мере одно ребро не является закрытым.

Другими словами, бесконечный открытый кластер существует тогда и только тогда, когда никакой конечный цикл из закрытых рёбер не отделяет бесконечную область на плоскости.

Доказательство основано на свойстве планарной двойственности и теореме Жордана о кривой. Если существует бесконечный открытый кластер в G , то любая попытка окружить его конечным циклом из закрытых рёбер G^* потерпит неудачу – такой цикл обязательно содержит хотя бы одно открытое ребро (иначе он образовал бы замкнутую кривую, отделяющую бесконечный кластер от «бесконечности», что противоречит неограниченности кластера). Обратно, если бесконечного кластера нет, то все открытые кластеры конечны. В этом случае можно показать, что вокруг любого заданного узла решётки G существует замкнутый цикл из закрытых рёбер G^* , отсекающий этот узел от бесконечности (путём обхода границ кластеров конечного радиуса). Таким образом, отсутствие бесконечного кластера эквивалентно существованию «барьера» из закрытых рёбер – по крайней мере один такой замкнутый цикл присутствует на всех масштабах.

Лемма 1 даёт топологический критерий: модель не имеет сквозного кластера, если можно найти достаточно большие замкнутые контуры из непроводящих связей, и наоборот, перколяция возникает, когда никакие конечные барьеры не могут удерживать кластер от разрастания. Этот критерий является основой для доказательства классической теоремы Харриса–Кестена и её обобщений.

Обобщение теоремы Харриса–Кестена

На основе леммы 1 можно получить условие, при котором критическая вероятность равна 0,5 для широкого класса решёток. Вначале напомним идею доказательства теоремы Харриса–Кестена для квадратной решётки, опираясь на топологический подход. Для решётки Z^2 рассмотрим событие \mathbf{H}_n : «существует путь из открытых рёбер, соединяющий левую и правую границы квадратной области размером $n \times n$ ». Аналогично определим \mathbf{V}_n как событие наличия пути из закрытых рёбер, соединяющего верхнюю и нижнюю границы этого же квадрата.

$$\text{Формально: } P_{0,5}(\mathbf{H}_n) = \frac{1}{2} \quad (1)$$

При $p = 0.5$ вероятность появления бесконечного кластера $\theta(p)$ удовлетворяет $\theta(0,5) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} P_{0,5}(\mathbf{H}_n) = \frac{1}{2}$. Но из леммы 1 известно, что при наличии хотя бы 50% проводящих связей бесконечный кластер не возникает почти наверняка. Значит, $\theta(0.5) = 0$, и потому $p_c \geq \frac{1}{2}$.

С другой стороны, строгие оценки и предельный переход показывают, что даже на бесконечной решётке при $p > 0.5$ с ненулевой вероятностью существует сквозной кластер: $\theta(p) > 0$ для любого $p > 0.5$, то есть $p_c \leq \frac{1}{2}$. Объединяя оценки, получаем: $p_c = \frac{1}{2}$.

Теорема 2. Пусть планарный граф G и его двойственный граф G^* однородны и обладают свойством самодвойственности (то есть G изоморфен G^* ;

пример — квадратная решётка для рёберной перколяции или треугольная — для вершинной). Тогда критическая вероятность $p_c = \frac{1}{2}$.

Благодаря однородности графа вероятности пересекающихся событий H_n и V_n равны при $p = 0.5$ вследствие симметрии. Самодвойственность означает, что события H_n и V_n взаимно исключают друг друга и в совокупности исчерпывают все исходы. Следовательно, при $p = 0.5$ вероятность пересечения равна $1/2$. По аналогии с квадратной решёткой, $\theta(0.5) = 0$, значит $p_c \geq \frac{1}{2}$. А при $p > 0.5$ — $\theta(p) > 0$, так как барьеры из закрытых рёбер не могут сдерживать рост. Отсюда: $p_c \leq \frac{1}{2}$, значит $p_c = \frac{1}{2}$.

Следствие: во многих симметричных случаях критическая вероятность равна $1/2$. Например, для вершинной перколяции на треугольной решётке (двойственной к шестиугольной) доказано $p_c = \frac{1}{2}$. Ранее этот результат получен методами симметрии (звезда–треугольник) и подтверждён численно. Топологический подход даёт строгое обоснование. Пример: решётка на поверхности тора (сосуд Клейна), самодвойственна — теорема 2 применима и здесь.

Заключение

В работе разработан общий подход к анализу порога перколяции на основе топологических свойств конфигураций. Предложен критерий, связывающий существование бесконечного кластера с отсутствием замкнутых барьеров из непроводящих элементов. Этот критерий позволил обобщить классическую теорему Харриса–Кестена о критическом значении вероятности для двумерных решёток. Показано, что для широкого класса планарных сетей, обладающих самодвойственной симметрией, критическая вероятность перколяции составляет $0,5$. Результаты согласуются с ранее известными частными случаями и дают единое объяснение этому явлению.

Перспективы дальнейших исследований включают применение топологического критерия к более сложным системам (например, перколяции в моделях со случайными дефектами структуры или на негомогенных графах), а также изучение аналогов критериев в задачах более высокой размерности.

Список литературы

1. Broadbent S.R., Hammersley J.M. Percolation processes. I. Crystals and mazes // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1957. Vol. 53, pp. 629–641.
2. Harris T.E. A lower bound for the critical probability in a certain percolation process // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1960. Vol. 56, pp. 13–20.
3. Kesten H. The critical probability of bond percolation on the square lattice equals $1/2$ // Commun. Math. Phys. 1980. Vol. 74, pp. 41–59.
4. Grimmett G. Percolation. 2nd ed. Berlin: Springer, 1999. 444 p.

References

1. Broadbent S.R., Hammersley J.M. Percolation processes. I. Crystals and mazes. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 1957, vol. 53, pp. 629–641.
2. Harris T.E. A lower bound for the critical probability in a certain percolation process. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 1960, vol. 56, pp. 13–20.
3. Kesten H. The critical probability of bond percolation on the square lattice equals $1/2$. Communications in Mathematical Physics, 1980, vol. 74, pp. 41–59.
4. Grimmett G. Percolation. 2nd edition. Berlin: Springer, 1999. 444 p.

DOI: 10.58168/OpEq2025_225-231

УДК 517.982.22

**ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ПОЛУЛИНЕЙНОГО
ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ**

APPROXIMATE SOLUTION OF A POLYLINEAR PARABOLIC EQUATION

Спирина Надежда Михайловна

старший преподаватель кафедры математики ВГЛУ, г. Воронеж, Россия

Сапронов Иван Васильевич

кандидат физико-математических наук, доцент,

доцент кафедры математики ВГЛУ, г. Воронеж, Россия

Веневитина Светлана Семеновна

кандидат физико-математических наук, доцент,

доцент кафедры математики ВГЛУ, г. Воронеж, Россия

Spirina Nadezhda Mikhailovna

Senior Lecturer at the Department of Mathematics, VSUFT, Voronezh, Russia

Sapronov Ivan Vasilievich

Ph.D. of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate

Professor at the Department of Mathematics, VSUFT, Voronezh, Russia

Venevitina Svetlana Semyonovna

Ph.D. of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate

Professor at the Department of Mathematics, VSUFT, Voronezh, Russia

Аннотация. Анализируется вопрос о сходимости метода Тонелли решения задачи Коши для абстрактного полулинейного параболического уравнения. Приводятся оценки погрешности метода.

Abstract. The convergence of Tonelli's method for solving the Cauchy problem for an abstract semilinear parabolic equation is analyzed. The error estimates of the method are provided.

Ключевые слова: банахово пространство, линейный оператор, задача Коши, метод Тонелли.

Keywords: Banach space, linear operator, Cauchy problem, Tonelli's method.

В банаховом пространстве E рассмотрим операторное уравнение с начальным условием

$$\frac{dx}{dt} + Ax = f(t, x) \quad (0 \leq t \leq 1), \quad (1)$$

$$x(0) = x_0. \quad (2)$$

Здесь $x(t)$ – неизвестная функция, с областью определения на отрезке на $[0, 1]$ с множеством значений в E , $f(t, x)$, при $t \in [0, 1]$ – нелинейный оператор, A – действующий в E линейный оператор с областью определения $D(A)$, x_0 – элемент, принадлежащий области $D(A)$. Функцию $x(t)$ будем считать решением задачи (1) – (2), если у неё существует непрерывная производная $\frac{dx}{dt}$ на $[0, 1]$, $x(t)$, $Ax(t)$ непрерывны на этом отрезке и $x(t)$ удовлетворяет (1) – (2).

Предположим также, что A – сильно позитивный оператор, то есть порождает аналитическую подгруппу $T(t)$. На функцию $f(t, x)$ наложим следующие ограничения:

$$\begin{aligned} \|f(t_1, x_1) - f(t_2, x_2)\| &\leq c(R)(|t_1 - t_2|^\delta + \|x_1 - x_2\|) \\ (0 \leq t_1, t_2 \leq 1, \|x_1\|, \|x_2\| \leq R, 0 \leq \delta < 1). \end{aligned} \quad (3)$$

Из [1] известно, что при этих условиях существует единственное решения задачи (1)–(2) на отрезке $[0, t] \subset [0, 1]$, и для этого решение $x(t)$ справедливо уравнение

$$x(t) = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)f(s, x(s))ds. \quad (4)$$

Метод Тонелли, по которому будем искать приближенное решение $x_n(t)$ задачи (1) – (2), состоит в следующем.

По $n=1,2,\dots$ и $h=1/n$ найдём $x_n(t)$ как решение задачи (5) - (6), где

$$\frac{dx_n(t)}{dt} + Ax_n(t) = f(t, x_n(t-h)) \quad (0 \leq t \leq 1), \quad (5)$$

$$x_n(t) = x_0 \quad (-h \leq t \leq 0). \quad (6)$$

Функцию $x_n(t)$ будем называть решением задачи (5) – (6), в том случае, если на отрезке $[0,1]$ существуют непрерывные производные $\frac{dx_n(t)}{dt}$, и $x_n(t)$, $Ax_n(t)$ тоже непрерывны на этом отрезке, к тому же $x_n(t)$ удовлетворяет (5) - (6).

Решение $x_n(t)$ будем находить последовательно на отрезках $[0, h]$, $[h, 2h]$... из следующего равенства

$$x_n(t) = T(t)x_0 + \int_0^t T(t-s)f(s, x_n(s-h))ds.$$

Задачи (1) – (2), разрешима локально, а задача (5) – (6) имеет решение на всем отрезке $[0,1]$.

Будем исследовать сходимость $x_n(t)$ к $x(t)$ и $Ax_n(t)$ к $Ax(t)$ на отрезке $[0, t]$, и, в случае, если $x(t)$ существует на всем отрезке $[0,1]$, докажем сходимость на всем отрезке $[0,1]$.

Теорема 1. Задача (1) – (2) имеет единственное решение на отрезке $[0, t]$, удовлетворяющее оценке

$$\|x_n(t) - x(t)\| \leq Zh \quad (7)$$

где $Z = const$.

Доказательство. Существование решения, его единственность доказаны в [1]. Для доказательства оценки (7) рассмотрим две леммы.

Лемма 1. На отрезке $[0, t]$ для решения $x_n(t)$ выполнено условие $\|x_n(t)\| \leq R$.

Лемма 2. Производная $x_n'(t)$ является ограниченной функцией на каждом ограниченном в E множестве, то есть

$$\|x_n'(t)\| \leq P(R) \quad (0 \leq t \leq 1, \|x_n(t)\| \leq R).$$

Воспользуемся условием (3) и этими леммами. Получим следующую оценку

$$\begin{aligned} \|x(t) - x_n(t)\| &\leq Wc(R) \int_0^t \|x_n(s) - x_n(s-h)\| ds + \\ &+ Wc(R) \int_0^t \|x(s) - x_n(s)\| ds \leq Wc(R)P(R)h + Wc(R) \int_0^t \|x_n(s) - x(s)\| ds \end{aligned}$$

Из этого неравенства следует:

$$\|x_n(t) - x(t)\| \leq \mathbb{Z}h$$

где $\mathbb{Z} = W_c(R)P(R)e^{W_c(R)}$.

Таким образом, теорема доказана.

Так как A – сильно позитивный оператор, то при любых действительных α определены его дробные степени.

В [1] показано: отрицательные дробные степени оператора A являются ограниченными. Таким образом, из сходимости $A^\alpha x_n(t)$ и $A^\alpha x(t)$ должна следовать сходимость $x_n(t)$ и $x(t)$. Докажем это утверждение.

Теорема 2. На отрезке $[0, t]$ справедлива оценка

$$\|A^\alpha x_n(t) - A^\alpha x(t)\| \leq \mathbb{Z}(\alpha)h \quad (8)$$

где $\mathbb{Z}(\alpha)h = const, 0 < \alpha < 1$.

Доказательство. Оценим $\|A^\alpha x_n(t) - A^\alpha x(t)\|$.

Получаем:

$$\begin{aligned} \|A^\alpha x_n(t) - A^\alpha x(t)\| &\leq c(\alpha, R) \int_0^t \frac{\|x(s) - x_n(s)\|}{(t-s)^\alpha} ds + \\ &+ c(\alpha, R)P(R)h \int_0^t \frac{ds}{(t-s)^\alpha}. \end{aligned}$$

Пользуясь теоремой 1, получаем оценку (8)

Таким образом, теорема доказана.

Докажем оценку (8) при $\alpha = 1$. В этом случае будет справедливо утверждение о сходимости производной приближенного решения к производной точного решения.

Пусть оператор $f(t, x)$ удовлетворяет дополнительным ограничениям.

Полагаем следующее:

существует производная Фреше $f_x'(t, x)$, удовлетворяющая неравенству:

$$\begin{aligned} \|f_x'(t_1, x_1) - f_x'(t_2, x_1)\|_{Z(E)} &\leq C(R) \left(|t_1 - t_2|^\delta + \|x_1 - x_2\|_E^\rho \right) \\ (\|x_1\|_E, \|x_2\|_E \leq R, \delta, \rho \in (0, 1)). \end{aligned} \quad (9)$$

При доказательстве оценки (8), будем опираться на следующие леммы

Лемма 3. Справедливо следующее равенство:

$$f(t, x_1) - f(t, x_2) = K(t, x_1, x_2)(x_1 - x_2),$$

где

$$K(t, x_1, x_2) = \int_0^1 f_x'(t, \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) d\lambda,$$

и следующая оценка:

$$\begin{aligned} \|K(t_1, x_1, y_1) - K(t_2, x_2, y_2)\|_{Z(E)} &\leq C(R) \left(|t_1 - t_2|^\delta + \|x_1 - x_2\|_E^\rho + \|y_1 - y_2\|_E^\rho \right) \\ (0 \leq t_1, t_2 \leq 1, \|x_1\|_E, \|x_2\|_E, \|y_1\|_E, \|y_2\|_E \leq R). \end{aligned}$$

Пусть $\varphi_h(t) = x(t) - x_n(t-h)$.

Лемма 4. Справедливо следующее неравенство:

$$\|\varphi_h(t+h+\Delta t) - \varphi_h(t+h)\| \leq \frac{Qh}{(t+h)^\alpha}, \text{ где } 0 \leq \alpha \leq 1, Q = const.$$

Теорема 3. Если оператор A сильно позитивен, оператор $f(t, x)$ удовлетворяет условию (3), оператор $f_x'(t, x)$ удовлетворяет условию (9),

на отрезке $[0, t^*]$ верна оценка

$$\|Ax_n(t) - ax(t)\| \leq M \cdot h, \text{ где } M = const.$$

Доказательство. Введем обозначение:

$$K(t, x_n(t-h), x(t)) = K(t).$$

Следовательно,

$$Ax_n(t) - Ax(t) = \int_0^t AT(t-s)K(s)(\varphi_n(s) - \varphi_n(t))ds + \\ + \int_0^t AT(t-s)(K(s) - K(t))\varphi_n(t)ds + (1-T(t))K(t)\varphi_n(t) = J_1 + J_2 + J_3.$$

Будем оценивать каждое слагаемое.

Очевидно, что $\|J_2\| \leq N_2 h$, $\|J_3\| \leq N_3 h$, где N_2, N_3 – константы.

J_1 рассмотрим в каждом из трёх случаев:

1) $0 < t \leq h$, 2) $h < t \leq 2h$, 3) $t > 2h$.

В случае 1) и 3) очевидно, что $\|J_1\| \leq N_1 h$.

В случае 2) воспользуемся леммой 4 и получим:

$$\|J_1\| \leq Qh \int_h^1 \frac{ds}{(t-s)^\alpha s^{1-\alpha}} \leq \tilde{Q}h.$$

Выберем $M = \max(N_1, N_2, N_3, \tilde{Q})$.

Таким образом, теорема доказана.

Теорема 4. $A^\alpha x_n(t)$ сходится к $A^\alpha x(t)$ при $0 \leq \alpha \leq 1$ на промежутке $[0, 1]$.

Доказательство. Пусть R – константа. Ранее доказано, что на отрезке $[0, t^*]$ верна оценка (8). Зафиксируем h ($h < R/Z$), и получим на этом отрезке $\|x_n(t) - x(t)\| \leq R$.

Рассмотрим множество $H = \{\tau : 0 \leq t \leq \tau \mid \|x_n(t) - x(t)\| \leq R\}$. Множество H ограничено. Следовательно, существует $\bar{\tau}(h)$ верхняя граница этого множества, где $\bar{\tau}(h) \in H$.

Очевидно, что $\bar{\tau}(h) = 1$, в случае, если приближенные решения $x_n(t)$ строить по $h < R/N$, при этом считаем, что N – достаточно велико, то есть приближенные решения будем строить по достаточно малому h . Таким образом получим, что $x_n(t)$ сходится к $x(t)$ на отрезке $[0, 1]$.

Рассматривая $A^\alpha x_n(t) - A^\alpha x(t)$ при $0 < \alpha < 1$. Получим оценку (8) на всем отрезке $[0,1]$.

При $\alpha = 1$ доказательство оценки (8) аналогично доказательству теоремы 3.

Таким образом, теорема доказана.

Список литературы

1. Филиппов Л.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. – М.: Наука, 2020. – 224 с.

References

1. Filippov, L.F. Differential Equations with Discontinuous Right-Hand Side. Moscow: Nauka, 2020. 224 p.

DOI: 10.58168/OpEq2025_232-239

УДК 004

**ПРИМЕНЕНИЕ РОБОТИЗИРОВАННОГО МАНИПУЛЯТОРА
ДЛЯ ЗАДАЧ ИСКУССТВЕННОГО ЛЕСОВОССТАНОВЛЕНИЯ
В РАЙОНАХ КРАЙНЕГО СЕВЕРА**

**THE USE OF A ROBOTIC MANIPULATOR FOR THE TASKS OF ARTIFICIAL
FORESTRY IN THE FAR NORTH**

Тарицына Анастасия Сергеевна

преподаватель кафедры прикладной математики и кибернетики

ПетрГУ, г. Петрозаводск, Россия

Щеголева Людмила Владимировна

доктор технических наук, доцент,

профессор кафедры прикладной математики и кибернетики

ПетрГУ, г. Петрозаводск, Россия

Taritsyna Anastasiia Sergeevna

Lecturer at the Department of Applied Mathematics and Cybernetics

Petrozavodsk State University, Petrozavodsk, Russia

Shchegoleva Liudmila Vladimirovna

Doctor of Technical Sciences, Associate Professor,

Professor of the Department of Applied Mathematics and Cybernetics

Petrozavodsk State University, Petrozavodsk, Russia

Аннотация. В статье рассмотрены возможности применения роботизированного манипулятора для задач лесовосстановления. Предложена концепция определения проходимости участка лесной местности с использованием данных с резистивного датчика давления и iти-датчика. Определены задачи для дальнейшего исследования. Предложенная концепция

может применяться в построении карты лесной местности для уточнения наличия препятствий по ходу движения мобильной платформы.

Abstract. The article discusses the possibilities of using a robotic manipulator for forest restoration tasks. The concept is proposed to determine the patency of the area of the forest area using data from a resistive pressure sensor and IMU-sensor. The tasks for further research are defined. The proposed concept can be applied in building a forest area to clarify the presence of obstacles in the direction of the mobile platform.

Ключевые слова: лесовосстановление, роботизированные системы, роботы-манипуляторы, автоматизация технологических процессов, резистивный датчик давления.

Keywords: foresting, robotic systems, robots-manipulators, automation of technological processes, resistant pressure sensors.

Введение

Лесовосстановление является обязательным мероприятием на месте проведенных вырубок леса. Лесовосстановление бывает трех видов: естественное, искусственное и комбинированное. Искусственное лесовосстановление наиболее востребовано в районах с неблагоприятными условиями. К таким районам можно отнести районы крайнего севера. Суровые условия достаточно сильно ограничивают возможности ручного труда. В связи с этим актуальна задача роботизации лесовосстановительных работ [1].

Для проведения лесовосстановительных работ в первую очередь необходима мобильная колесная платформа, позволяющая доставить устройство, выполняющее посадочные работы, и саженцы до места проведения работ [2]. Важным элементом конструкции роботизированного устройства являются манипуляторы. Они применяются и для решения задач навигации, и для выполнения различных производственных работ. На рабочий орган манипулятора могут быть прикреплены устройства для захвата, ковш, различные датчики [3].

В статье [1] предложена концептуальная модель, позволяющая решать различные задачи, которые могут возникать при роботизации лесовосстановительных работ. К таким задачам можно отнести движение по пересеченной местности и мониторинг окружающей среды. Для этого используются различные датчики, например, датчик температуры/давления, камера и т. д.

Для выполнения посадок необходимо иметь карту местности. Построение карты может также быть возложено на роботизированное устройство. Это может быть мобильная платформа с установленными на ней лидаром и видеокамерой [4]. Такая система позволит определить препятствия, находящиеся на пути робота, например, сухой пенек, дерево или большой камень. Но также необходимо понимать, возможно ли проехать по какой-то части местности. Например, на пути может оказаться болотистый участок. Построение карты и определение почвы можно осуществлять с использованием дронов [5].

В лесной местности районов крайнего севера описанные выше решения могут быть неприменимы в случае плохих погодных условий, например, использование камер во время осадков ухудшает картинку и добавляет лишние шумы, что может привести к ошибкам идентификации. Для уточнения данных, получаемых с неустойчивых к визуальным помехам датчиков, предлагается использовать сенсорный подход.

Для определения не только факта касания, но и уточнения силы, с которой робот взаимодействует с препятствием, можно использовать резистивный датчик давления (далее-датчик силы) [6].

С помощью датчика силы можно определять не только класс объекта, находящегося на пути [7], но и повлиять на саму местность, внести корректировки в расположение подвижных объектов. Например, можно определить, что если препятствие представляет собой непреодолимый объект, то его нужно обязательно объезжать, а если, препятствие можно сдвинуть, то его можно вообще удалить из рассматриваемой местности, а если его можно

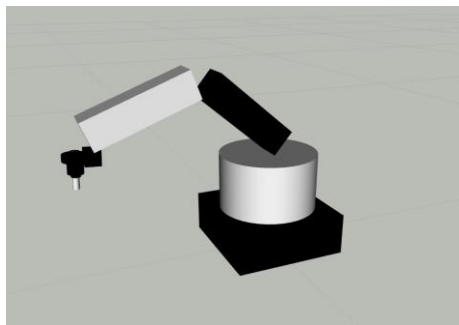
наклонить, то в этом случае оно является преодолимым и «сквозь» него можно проехать.

Определение проходимости участка лесной местности

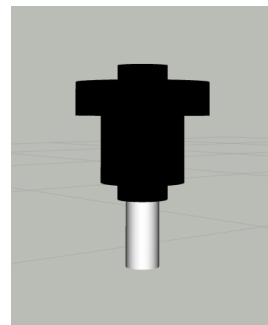
Рассмотрим применение датчика силы для определения возможности прохода по земельному участку при выполнении лесовосстановительных работ. В первую очередь необходимо определить, является ли почва достаточно твердой для прохода мобильной платформы. Для принятия такого решения предназначены специальные устройства такие, как электронные твердомеры почвы или же пенетрометры, измеряющие плотность/сопротивление почвы при его введении в почву. Но такие датчики не позволяют вести мониторинг показаний, вследствие чего невозможен и анализ данных.

Для определения возможности прохода по участку, предназначенному для лесовосстановления, предлагается использовать комбинацию датчика силы и *imu*-датчика.

Предполагаем, что платформа с установленным на ней манипулятором движется по горизонтальной поверхности. На конечный эффектор манипулятора крепится щуп. При этом щуп содержит датчик силы и *imu*-датчик (рисунок 1).



(a)



(b)

Рис. 1. (a) - модель манипулятора с 4 степенями свободы, (b) - модель щупа, прикрепленного на конечный эффектор манипулятора.

Участок для лесовосстановления разбивается на небольшие по площади зоны. Если в зоне по ходу движения находится визуально определяемое

препятствие (например, дерево или большой камень), то этот участок не посещается. Проверяются только визуально свободные участки.

Определение возможности движения платформы в каждой зоне может происходить следующим образом. Манипулятор совершает движение щупа ровно сверху вниз в визуально свободную зону. Датчик силы фиксирует факт касания препятствия, которое может находиться в почве, также возможно фиксирование плотности почвы. Если почва слабо или среднеплотная, то ити-датчик поможет определить глубину проникновения щупа. Если окажется, что щуп погружен ниже уровня земли, на которой стоит платформа, плюс высота колес, то этот участок платформа преодолеть не сможет.

При этом возникает ряд вопросов, которые требуют дальнейшего исследования:

- как осуществить прямолинейное вертикальное движение манипулятора;
- в какой момент манипулятору следует остановиться;
- как разделить участок на зоны;
- какого размера должны быть зоны;
- достаточно ли одного маневра щупа для принятия решения о типе всей зоны;
- что считать слабым, средним и сильным давлением;
- следует уточнить характеристики участка, где платформа сможет пройти, а где – нет.

Решение многих из этих вопросов требует натуральных экспериментов, которые достаточно сложно провести, так как они требуют наличия разнообразных по условиям почвы участков, а также готовый для эксплуатации манипулятор с установленными щупом, датчиками, аппаратным и программным обеспечением для сбора и обработки данных. В качестве альтернативы можно использовать подход на основе моделирования поверхности земельного участка и манипулятора. Подходящей средой для этого может стать симулятор Gazebo [8].

Он полностью учитывает все физические характеристики объектов и позволяет программировать действия оборудования.

Заключение

Предложен подход для решения задачи картирования участков лесовосстановления с использованием мобильной роботизированной платформы. На платформе должен быть установлен манипулятор, на концевом эффекторе которого размещены резистивный датчик давления и imu-датчик. Предложенная конструкция применима для определения проходимости участка лесной местности.

Список литературы

1. Рого Г.Э., Корзун Д.Ж., Щеголева Л.В. Проект «Лесной робот»: концептуальная модель анализа движения мобильной робототехнической системы для лесовосстановления и рубок ухода // Сборник материалов Всероссийской научно-практической конференции. Астрахань, 2022. С. 206–210.
2. Долганов, А. Г. Общие проектные решения по применению роботов в лесной индустрии = General design solutions for application of robots in the forest industry / А. Г. Долганов // Эффективный ответ на современные вызовы с учетом взаимодействия человека и природы, человека и технологий: социально-экономические и экологические проблемы лесного комплекса : материалы XIII Международной научно-технической конференции / Министерство науки и высшего образования Российской Федерации, Уральский государственный лесотехнический университет. – Екатеринбург, 2021. – С. 498–502.
3. Ильинцев А.С., Наквасина Е.Н., Богданов А.П., Воронин В.В., Шумилова Ю.Н. Применения экскаваторов для обработки почвы при искусственном лесовосстановлении в таежной зоне // Материалы VIII Всероссийской научно-технической конференции. Санкт-Петербург, 2023. С. 248–251.

4. Xuexi Zhang, Jiajun Lai, Dongliang Xu, Huaijun Li, Minyue Fu “2D Lidar-Based SLAM and Path Planning for Indoor Rescue Using Mobile Robots” // Journal of Advanced Transportation. Volume 2020. Issue 1. DOI: <https://doi.org/10.1155/2020/8867937>.

5. Haizhou Ding, Baohua Zhang, Jun Zhou “Recent developments and applications of simultaneous localization and mapping in agriculture” // Journal of Field Robotics. 2022. DOI: 10.1002/rob.22077.

6. Тарицына А.С. Selection of Equipment for the Force Sensitive Resistor 0.5 Sensor / А.С. Тарицына, Л.В. Щеголева // Proceeding of the 36th conference of FRUCT Association. - Lappeenranta, Finland, 2024. - P.945-949. - URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=74802703>. - ISSN 2305-7254.

7. Щеголева Л. В., Тарицына А. С. Разработка алгоритма определения класса препятствия в процессе взаимодействия его с манипулятором // Программная инженерия. 2024. Том 15, № 10. С. 532—538. DOI: 10.17587/prin.15.532-538.

8. Manuel Sanchez, Jesus Morales, Jorge L. Martinez “Automatically Annotated Dataset of a Ground Mobile Robot in Natural Environments via Gazebo Simulations” // Sensors. 2022. DOI: 10.3390/s22155599.

References

1. Rego G.E., Korzun D.Zh., Schegoleva L.V. The Forest Robot project: a conceptual model for the analysis of the movement of a mobile robotics system for forestry and carriage of care // Collection of materials of the All-Russian Scientific and Practical Conference. Astrakhan, 2022. С. 206–210.

2. Dolganov, A. G. General design solutions for the use of robots in the forest industry = General Design Solutions for Application of Robots in the Forest Industry / A. G. Dolganov // Effective response to modern challenges, taking into account the interaction of man and nature, man and technology: socio-economic and environmental

problems Forest complex: Materials of the XIII International Scientific and Technical Conference / Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, Ural State Forestry University. - Yekaterinburg, 2021. - C. 498–502.

3. Ilyintsev A.S., Nakvasina E.N., Bogdanov A.P., Voronin V.V., Shumilova Yu.N. The use of excavators for soil processing for artificial forestry in the taiga zone // Materials of the VIII All-Russian Scientific and Technical Conference. St. Petersburg, 2023. M. 248–251.

4. Xuexi Zhang, Jiajun Lai, Dongliang Xu, Huaijun Li, Minyue Fu “2D Lidar-Based SLAM and Path Planning for Indoor Rescue Using Mobile Robots” // Journal of Advanced Transportation. Volume 2020. Issue 1. DOI: <https://doi.org/10.1155/2020/8867937>.

5. Haizhou Ding, Baohua Zhang, Jun Zhou “Recent developments and applications of simultaneous localization and mapping in agriculture” // Journal of Field Robotics. 2022. DOI: 10.1002/rob.22077.

6. Taritsyna A.S. Selection of Equipment for the Force Sensitive Resistor 0.5 Sensor / A.S. Taritsyna, L.V. Shchegoleva // ProCeeDing of the 36th Conference of Fruct Association. - Lappeenranta, Finland, 2024. - C. 945-949. - URL: <https://www.elibary.ru/item.asp?id=74802703>. - ISSN 2305-7254.

7. Schegoleva L.V., Taritsyna A. S. Development of an algorithm for determining the obstacle class in the process of interaction with the manipulator // Software engineering. 2024. Volume 15, No. 10. C. 532-538. DOI: 10.17587/prin.15.532-538.

8. Manuel Sanchez, Jesus Morales, Jorge L. Martinez “Automatically Annotated Dataset of a Ground Mobile Robot in Natural Environments via Gazebo Simulations” // Sensors. 2022. DOI: 10.3390/s22155599.

DOI: 10.58168/OpEq2025_240-245

УДК 517.984

**СПЕКТР И СВЯЗАННЫЕ СОСТОЯНИЕ ОПЕРАТОРА ЭНЕРГИИ ТРЕХ
МАГНОННЫХ СИСТЕМ В МОДЕЛИ ГЕЙЗЕНБЕРГА В ДВУМЕРНОМ
И ТРЕХМЕРНОМ РЕШЕТКЕ**

**SPECTRA AND BOUND STATE OF THE ENERGY OPERATOR OF THREE-
MAGNON SYSTEMS IN THE HEISENBERG MODEL IN THE TWO- AND
THREE-DIMENSIONAL LATTICE**

Ташпулатов Саъдулла Мамаражабович

Доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, ведущий
научный сотрудник института ядерной физики академии наук республики

Узбекистан, Ташкент, Узбекистан

Tashpulatov Sadulla Mamarajabovich

D. Sc. of Physical and Mathematical Sciences, senior researcher, leading researcher
at the institute of Nuclear Physics of the academy of Sciences of the Republic
of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan

Аннотация. Исследована структура существенного спектра и дискретный спектр оператора энергии трехмагнонных систем в модели Гейзенберга.

Abstract. Investigated the structure of essential spectra and discrete spectra of the energy operator of three-magnon systems in the Heisenberg model.

Ключевые слова: трехмагнонная система, связанные состояние, модель Гейзенберга, существенный спектр.

Keywords: three-magnon systems, bound states, Heisenberg model, essential spectra.

Рассматривается оператора энергии трехмагнонных систем в модели Гейзенберга в двумерном и трехмерном решетке и исследуется структура существенного спектра и дискретный спектр системы. В работе [1] трехмагнонная система была рассмотрена в двумерной изотропной и анизотропной ограниченной ферромагнитной решетке, и были исследованы спектр и связанные состояние (СС) системы с помощью численных методов. В работе [2] трехмагнонная система была рассмотрена в изотропной негейзенберговской ферромагнитной модели со значениями спина единицы с взаимодействием ближайших соседей. Изучена структура существенного спектра системы и была получена верхняя и нижняя оценка для количества трехмагнонных СС системы. В данной работе рассматривается оператор энергии трехмагнонных систем в модели Гейзенберга и исследуется структура существенного спектра и дискретный спектр системы в одномерном ферромагнетике. Гамильтониан рассматриваемой системы имеет вид

$$H = J \sum_{m,\tau} (\vec{S}_m \vec{S}_{m+\tau}). \quad (1)$$

Здесь $J < 0$ – параметр билинейного обменного взаимодействия между атомами ближайших соседей в решетке, $\vec{S}_m = (S_m^x, S_m^y, S_m^z)$ – оператор атомного спина узла m ν – мерной целочисленной решетки Z^ν , а $\tau = \pm e_j$, $j = 1, 2, \dots, \nu$, где e_j – единичные орты, т.е. суммирование ведется по ближайшим соседям. Положим $S_m^\pm = S_m^x \pm i S_m^y$. Обозначим через φ_0 вектор, называемый вакуумным и однозначно определяемый условиями: $S_m^+ \varphi_0 = 0$, $S_m^z \varphi_0 = \frac{1}{2} \varphi_0$, $|\varphi_0| = 1$. Векторы $S_p^- S_q^- S_r^- \varphi_0$ описывает состояние системы трех магнонов, находящихся в узлах p, q и r . Замыкание пространства, образованного всевозможными линейными комбинациями этих векторов, обозначим через \mathcal{H}_3 . Оно называется трехмагнонным пространством оператора H .

Теорема 1. Подпространство \mathcal{H}_3 инвариантно относительно оператора H , и сужение H_3 оператора H на подпространство \mathcal{H}_3 является ограниченным самосопряженным оператором. Он порождает ограниченный самосопряженный

оператор \bar{H}_3 , действующий в пространстве l_2^{as} по формуле $(\bar{H}_3 f)(p, q, r) =$

$$\begin{aligned}
&= J \sum_{\tau} [\delta_{p,q+\tau} + \delta_{p+\tau,q} + \delta_{p+\tau,r} + \delta_{p,r+\tau} + \delta_{q,r+\tau} + \delta_{q+\tau,r} - 6] f(p, q, r) - \\
&- \frac{1}{2} \delta_{p-\tau,q} f(p - \tau, q, r) - \frac{1}{2} \delta_{p-\tau,r} f(p - \tau, q, r) - \frac{1}{2} \delta_{q-\tau,r} f(p, q - \tau, r) - \\
&- \frac{1}{2} \delta_{q,r-\tau} f(p, q, r - \tau) - \frac{1}{2} \delta_{p,q-\tau} f(p, q - \tau, r) - \frac{1}{2} \delta_{p,r-\tau} f(p, q, r - \tau) + \\
&+ f(p - \tau, q, r) + f(p, q - \tau, r) + f(p, q, r - \tau) - \frac{1}{2} \delta_{p+\tau,q} f(p + \tau, q, r) - \\
&- \frac{1}{2} \delta_{p+\tau,r} f(p + \tau, q, r) - \frac{1}{2} \delta_{q+\tau,r} f(p, q + \tau, r) - \frac{1}{2} \delta_{q,r+\tau} f(p, q, r + \tau) - \\
&- \frac{1}{2} \delta_{p,q+\tau} f(p, q + \tau, r) - \frac{1}{2} \delta_{p,r+\tau} f(p, q, r + \tau) + f(p + \tau, q, r) + f(p, q + \tau, r) + \\
&+ f(p, q, r + \tau)], \tag{2}
\end{aligned}$$

где $\delta_{k,j}$ – кронекеровский символ. Сам оператор H_3 на вектор $\psi \in \mathcal{H}_3$ действует по формуле

$$H_3 \psi = \sum_{p,q,r \in Z^\nu} (\bar{H}_3 f)(p, q, r) S_p^- S_q^- S_r^- \varphi_0. \tag{3}$$

Определение 1. Собственная функция $\varphi_\Lambda \in L_2(T^\nu)$ оператора $\tilde{H}_{3\Lambda}$, отвечающая собственному значению $z_\Lambda \in \sigma_{ess}(\tilde{H}_{3\Lambda})$, называется связанным состоянием (СС) оператора $\tilde{H}_{3\Lambda}$, а величина z_Λ – энергией этого СС.

Положим $\Lambda_1 = \lambda + \mu$, $\Lambda_2 = \mu + \gamma$ и $\Lambda_3 = \lambda + \gamma$, где λ, μ, γ есть квазиимпульсы магнонов. Обозначим через \mathcal{F} преобразование Фурье: $\mathcal{F}: l_2((Z^\nu)^3) \rightarrow L_2((T^\nu)^3) \equiv \tilde{\mathcal{H}}_3$, где T^ν – ν – мерный тор, снабженный нормированной мерой Лебега $d\lambda$, т.е., $\lambda(T^\nu) = 1$. Положим $\tilde{H}_3 = \mathcal{F} \bar{H}_3 \mathcal{F}^{-1}$. В квазиимпульсном представлении оператор \bar{H}_3 действует в гильбертовом пространстве $L_2^{symm}((T^\nu)^3)$, где L_2^{symm} – подпространство симметричных функций в $L_2((T^\nu)^3)$.

Теорема 2. Преобразование Фурье переводит оператор \bar{H}_3 в ограниченный самосопряженный оператор $\tilde{H}_3 = \mathcal{F} \bar{H}_3 \mathcal{F}^{-1}$, действующий в пространстве $L_2^{symm}((T^\nu)^3)$ по формуле

$$\begin{aligned}
\tilde{H}_3 \psi_3 = & -J\{12 - 4\cos\lambda - 4\cos\mu - 4\cos\gamma\}f(\lambda, \mu, \gamma) + J \int_{T^v} [12 + 2\cos(\lambda - s) + \\
& + 2\cos(\mu - s) - 2\cos s - 2\cos(\lambda + \mu - s) - 4\cos\lambda - 4\cos\mu - 4\cos\gamma] \times \\
& \times f(s, \lambda + \mu - s, \gamma) ds + J \int_{T^v} [12 - 4\cos\lambda - 4\cos\mu - 4\cos\gamma + 2\cos(\lambda - s) + \\
& + 2\cos(\gamma - s) - 2\cos s - 2\cos(\lambda + \gamma - s) f(s, \mu, \lambda + \gamma - s) ds + \\
& + J \int_{T^v} [12 - 4\cos\lambda - 4\cos\mu - 4\cos\gamma - 2\cos s - 2\cos(\mu + \gamma - s) + \\
& + 2\cos(\mu - s) + 2\cos(\gamma - s) f(\lambda, s, \mu + \gamma - s) ds + \\
& + J \int_{T^v} \int_{T^v} [12 - 44\cos\lambda - 4\cos\mu - 4\cos\gamma + 3\cos(\lambda + \mu + \gamma - s - t) + \\
& + 2\cos(\lambda + \mu - s) + 4\cos s + 2\cos(\lambda + \gamma - s) + 4\cos t + 2\cos(\lambda + \mu - t) + \\
& + 2\cos(\mu + \gamma - t) + \cos(\lambda + t) + 2\cos(\mu - s - t) + 2\cos(\lambda - s - t) - \\
& - 8\cos(\lambda - s) - 6\cos(\mu - t) - 8\cos(\lambda + \mu - s - t) - \\
& - 2\cos(\lambda - t) f(s, t, \lambda + \mu + \gamma - s - t) ds dt. \tag{4}
\end{aligned}$$

Теорема 3. а). Если $\nu = 2$ и полный квазиимпульс системы $\Lambda = (\pi, \pi)$, тогда существенный спектр оператора $\tilde{H}_{3\Lambda}$ состоит из трёх значений: $\sigma_{ess}(\tilde{H}_{3\Lambda}) = \{0, -6J, -12J\}$, и для число трехмагнанных СС N имеет место соотношение $1 \leq N \leq 18$.

б). Если $\nu = 2$ и полный квазиимпульс системы $\Lambda = (0, 0)$, тогда существенный спектр оператора $\tilde{H}_{3\Lambda}$ состоит из единственного отрезка: $\sigma_{ess}(\tilde{H}_{3\Lambda}) = [0, -48J]$, и для число трехмагнанных СС N имеет место соотношение $0 \leq N \leq 17$.

с). Если $\nu = 2$ и полный квазиимпульс системы $\Lambda \neq (\pi, \pi)$ и $\Lambda \neq (0, 0)$, тогда существенный спектр оператора $\tilde{H}_{3\Lambda}$ состоит из объединений трех отрезков:

$$\sigma_{ess}(\tilde{H}_{3\Lambda}) = [-4J(6 - \cos \frac{\Lambda_1^1}{2} - \cos \frac{\Lambda_1^2}{2} - \cos \frac{\Lambda_2^1}{2} - \cos \frac{\Lambda_2^2}{2} - \cos \frac{\Lambda_3^1}{2} -$$

$-\cos \frac{\Lambda_3^2}{2}), -4J(6 + \cos \frac{\Lambda_1^1}{2} + \cos \frac{\Lambda_1^2}{2} + \cos \frac{\Lambda_1^2}{2} + \cos \frac{\Lambda_2^1}{2} + \cos \frac{\Lambda_2^2}{2} + \cos \frac{\Lambda_3^1}{2} +$
 $+\cos \frac{\Lambda_3^2}{2})] \cup [-4J(2 - \cos \frac{\Lambda_1^1}{2} - \cos \frac{\Lambda_1^2}{2}) + z_{\Lambda_2} + z_{\Lambda_3}, -4J \left(2 + \cos \frac{\Lambda_1^1}{2} + \cos \frac{\Lambda_1^2}{2} \right) +$
 $+z_{\Lambda_2} + z_{\Lambda_3}] \cup [-4J(4 - \cos \frac{\Lambda_1^2}{2} - \cos \frac{\Lambda_2^1}{2} - \cos \frac{\Lambda_2^2}{2} - \cos \frac{\Lambda_3^1}{2} - \cos \frac{\Lambda_3^2}{2}) + z_{\Lambda_1}, -$
 $-4J(4 + \cos \frac{\Lambda_2^1}{2} + \cos \frac{\Lambda_2^2}{2} + \cos \frac{\Lambda_2^2}{2} + \cos \frac{\Lambda_3^1}{2} + \cos \frac{\Lambda_3^2}{2}) + z_{\Lambda_1}]$ и для число
 трехмагнанных СС N имеет место соотношение $1 \leq N \leq 27$.

Теорема 4. а). Если $\nu = 3$ и полный квазиимпульс системы $\Lambda = (\pi, \pi, \pi)$, тогда существенный спектр оператора $\tilde{H}_{3\Lambda}$ состоит из четырех значений: $\sigma_{ess}(\tilde{H}_{3\Lambda}) = \{0, -36J, -8J, -14J\}$, и для число трехмагнанных СС N имеет место соотношение $1 \leq N \leq 26$.

б). Если $\nu = 3$ и полный квазиимпульс системы $\Lambda = (0,0,0)$, тогда существенный спектр оператора $\tilde{H}_{3\Lambda}$ состоит из единственного отрезка: $\sigma_{ess}(\tilde{H}_{3\Lambda}) = [0, -72J]$, и для число трехмагнанных СС N имеет место соотношение $0 \leq N \leq 25$.

с). Если $\nu = 3$ и полный квазиимпульс системы $\Lambda \neq (\pi, \pi, \pi)$ и $\Lambda \neq (0,0,0)$, тогда существенный спектр оператора $\tilde{H}_{3\Lambda}$ состоит из объединений трех отрезков:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{ess}(\tilde{H}_{3\Lambda}) = & [-4J \left(9 - \sum_{i=1}^3 \cos \frac{\Lambda_1^i}{2} - \sum_{i=1}^3 \cos \frac{\Lambda_2^i}{2} - \sum_{i=1}^3 \cos \frac{\Lambda_3^i}{2} \right), \\
 & -4J(9 + \sum_{i=1}^3 \cos \frac{\Lambda_1^i}{2} + \sum_{i=1}^3 \cos \frac{\Lambda_2^i}{2} - \sum_{i=1}^3 \cos \frac{\Lambda_3^i}{2} + \sum_{i=1}^3 \cos \frac{\Lambda_3^i}{2})] \cup \\
 & \cup [-4J \left(3 - \sum_{i=1}^3 \cos \frac{\Lambda_1^i}{2} \right) + z_{\Lambda_2} + z_{\Lambda_3}, \\
 & -4J \left(3 + \sum_{i=1}^3 \cos \frac{\Lambda_1^i}{2} \right) + z_{\Lambda_2} + z_{\Lambda_3}] \cup \\
 & \cup [-4J \left(6 - \sum_{i=1}^3 \cos \frac{\Lambda_2^i}{2} - \sum_{i=1}^3 \cos \frac{\Lambda_3^i}{2} \right) + z_{\Lambda_1},
 \end{aligned}$$

$$-4J(6 + \sum_{i=1}^3 \cos \frac{\Lambda_2^i}{2} + \sum_{i=1}^3 \cos \frac{\Lambda_3^i}{2}) + z_{\Lambda_1}],$$

и для число трехмагнонных СС N имеет место соотношение $1 \leq N \leq 26$, где

z_{Λ_1} , z_{Λ_2} и z_{Λ_3} некоторые конкретные числа и

$\Lambda_1 = (\Lambda_1^1, \Lambda_1^2, \Lambda_1^3) \in T^3$, $\Lambda_2 = (\Lambda_2^1, \Lambda_2^2, \Lambda_2^3) \in T^3$ и $\Lambda_3 = (\Lambda_3^1, \Lambda_3^2, \Lambda_3^3) \in T^3$.

Список литературы

1. Van Himbergen J.E., and J. A. Tjon J. A. Three-Magnon Bound States in the Two-Dimensional Isotropic and Anisotropic Heisenberg Ferromagnet. // Physica A. 1976.V. 82, P. 389-416. [https://doi.org/10.1016/0378-4371\(76\)90015-7](https://doi.org/10.1016/0378-4371(76)90015-7).

2. Tashpulatov S. M. Structure of Essential Spectrum and Discrete Spectrum of the Energy Operator of Three-Magnon Systems in the Isotropic Ferromagnetic Non-Heisenberg Model with Spin One and Nearest-Neighbor Interactions. // Journal of Applied Mathematics and Physics., 2019.V. 7, № 4. P. 874-899. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-49763-7>.

References

1. Van Himbergen J.E., and J. A. Tjon J. A. Three-Magnon Bound States in the Two-Dimensional Isotropic and Anisotropic Heisenberg Ferromagnet. // Physica A. 1976.V. 82, P. 389-416. [https://doi.org/10.1016/0378-4371\(76\)90015-7](https://doi.org/10.1016/0378-4371(76)90015-7).

2. Tashpulatov S. M. Structure of Essential Spectrum and Discrete Spectrum of the Energy Operator of Three-Magnon Systems in the Isotropic Ferromagnetic Non-Heisenberg Model with Spin One and Nearest-Neighbor Interactions. // Journal of Applied Mathematics and Physics., 2019.V. 7, № 4. P. 874-899. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-49763-7>.

DOI: 10.58168/OpEq2025_246-249

УДК 517.9

**ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ОДНОГО ЛИНЕЙНОГО
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ СО СКАЛЯРНЫМ
ПРОИЗВЕДЕНИЕМ В ПРАВОЙ ЧАСТИ**

**THE CAUCHY PROBLEM FOR A LINEAR DIFFERENTIAL EQUATION WITH
A SCALAR PRODUCT ON THE RIGHT SIDE**

Усков Владимир Игоревич

кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры
математики

Чеканина Ольга Юрьевна

ассистент кафедры математики

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный лесотехнический университет им.
Г.Ф. Морозова», г. Воронеж, Россия

Uskov Vladimir Igorevich

PhD in Physics and Mathematical, Senior Lecturer at the Department of Mathematics

Chekanina Olga Yurievna

Assistant of the Department of Mathematics

Voronezh State Forestry University named after G.F. Morozov, Voronezh, Russia

Аннотация. Рассматривается задача Коши для неоднородного дифференциального уравнения первого порядка с функционалом-скалярным произведением от искомой функции в правой части. Получен результат о существовании, единственности решения; найдено это решение в аналитическом виде.

Abstract. The Cauchy problem for an inhomogeneous first-order differential equation with a functional is a scalar product of the desired function on the right side.

The result about the existence and uniqueness of the solution is obtained; this solution is found in an analytical form.

Ключевые слова: задача Коши, дифференциальное уравнение, скалярное произведение, решение.

Keywords: Cauchy problem, differential equation, scalar product, solution.

Постановка задачи

Рассматривается задача Коши:

$$\frac{du}{dt} = \langle a, u(t) \rangle + b + f(t), \quad (1)$$

$$u(0) = g, \quad (2)$$

где заданы постоянные векторы $a, b, g \in \mathbf{R}^n$, вектор-функция $f(t) \in \mathbf{R}^n$, $t \in \mathfrak{I} = [0; T]$. Символом $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначено скалярное произведение в \mathbf{R}^n .

Требуется найти функцию $u(t)$, дифференцируемую и удовлетворяющую (1), (2) при каждом $t \in \mathfrak{I}$.

Будем предполагать, что $\langle a, b \rangle \neq 0$.

Уравнениями (1) описывается процесс метаногенеза при изменении условий теплообмена с окружающей средой, межотраслевой баланс (модель В. Леонтьева), термомеханическое поведение полимеров и т.д.

Вспомогательные утверждения

Рассмотрим оператор $D(\cdot) = \langle a, (\cdot) \rangle + b$.

Утверждение 1. Оператор D линеен.

Доказательство. Возьмем элементы $v, w \in \mathbf{R}^n$ и скаляр $c \in \mathbf{R}$. Имеем:

$$D(v + w) = \langle a, (v + w) \rangle + b = \langle a, v \rangle + b + \langle a, w \rangle + b = Dv + Dw,$$

что влечет аддитивность оператора D .

Далее, $D(cv) = \langle a, cv \rangle + b = c \langle a, v \rangle + b = cDv$, что влечет однородность.

Тем самым, линейность доказана.

Утверждение 2. Оператор D ограничен.

Доказательство. Воспользовавшись определением ограниченного оператора и неравенством Коши-Буняковского [1] имеем:

$$\|Dv\| = \|\langle a, v \rangle b\| = |\langle a, v \rangle| \|b\| \leq \|a\| \|v\| \|b\| = \mu \|v\|$$

с постоянной $\mu = \|a\| \|b\| > 0$, что и влечет ограниченность оператора D .

Утверждение 3. Степень D^i , $i = 1, 2, \dots$, оператора D определяется формулой:

$$D^i v = \langle a, b \rangle^{i-1} \langle a, v \rangle b.$$

Доказательство. Применим метод математической индукции по i . При $i = 1$ утверждение очевидно верно. Пусть оно верно для $i = k$. Тогда для $i = k + 1$ имеем:

$$\begin{aligned} D^{k+1} v &= D(D^k v) = \langle a, D^k v \rangle b = \langle a, b \rangle^{k-1} \langle a, v \rangle \langle a, b \rangle b = \\ &= \langle a, b \rangle^k \langle a, v \rangle b, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Утверждение 4. Операторная экспонента e^{tD} определяется формулой:

$$e^{tD} v = v + \frac{\langle a, v \rangle}{\langle a, b \rangle} (e^{\langle a, b \rangle t} - 1) b.$$

Доказательство. Разложим операторную экспоненту в ряд Маклорена и воспользуемся предыдущим утверждением:

$$\begin{aligned} e^{tD} v &= v + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t^i}{i!} D^i v = v + \langle a, v \rangle \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t^i}{i!} \langle a, b \rangle^{i-1} b = \\ &= v + \frac{\langle a, v \rangle}{\langle a, b \rangle} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t^i}{i!} \langle a, b \rangle^i b = v + \frac{\langle a, v \rangle}{\langle a, b \rangle} (e^{\langle a, b \rangle t} - 1) b, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Решение задачи (1), (2)

Применив утверждения выше и результаты монографии С.Г. Крейна [2], получим следующий результат.

Теорема. Пусть $f(t)$ непрерывна. Тогда решение задачи (1), (2) существует, единственно и определяется формулой:

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t), \quad (3)$$

где

$$u_1(t) = g + \frac{\langle a, g \rangle}{\langle a, b \rangle} (e^{\langle a, b \rangle t} - 1)b,$$

$$u_2(t) = \int_0^t f(s) ds + \int_0^t \frac{\langle a, f(s) \rangle}{\langle a, b \rangle} (e^{\langle a, b \rangle (t-s)} - 1)b ds.$$

Список литературы

1. Функциональный анализ. – Под общ. ред. С.Г. Крейна. – М.: Наука, 1972. – 544 с.
2. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1967. – 464 с.

References

1. Functional analysis. – Under the general editorship of S.G. Krein. – M.: Nauka, 1972. – 544 p.
2. Krein S.G. Linear differential equations in a Banach space. Moscow: Nauka Publ., 1967, 464 p.

DOI: 10.58168/OpEq2025_250-263

УДК 539.3+519.65

**ПРИМЕНЕНИЕ БЫСТРЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ
ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ
ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ**
APPLICATION OF FAST EXPANSIONS TO STUDY THE STRESS STATE
OF A RECTANGULAR PLATE ON AN ELASTIC BASE

Чернышов Александр Данилович

доктор физико-математических наук, профессор,
профессор кафедры высшей математики, ВГУИТ, г. Воронеж, Россия

Горайнов Виталий Валерьевич

кандидат физико-математических наук, доцент,
доцент кафедры прикладной математики и механики, ВГТУ, г. Воронеж, Россия

Никифорова Ольга Юрьевна

старший преподаватель кафедры высшей математики
ВГУИТ, г. Воронеж, Россия

Chernyshov Alexander Danilovich

Dr. of Physical and Mathematical Sciences, Professor,
Professor of the Department of Higher Mathematics
Voronezh State University of Engineering Technologies, Voronezh, Russia

Goryainov Vitaly Valerievich

PhD. of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor at the Department of Applied Mathematics and Mechanics
Voronezh State Technical University, Voronezh, Russia

Nikiforova Olga Yurievna

Senior Lecturer of the Department of Higher Mathematics
Voronezh State University of Engineering Technologies, Voronezh, Russia

Аннотация. Поставленная задача решена в аналитическом виде методом универсальных быстрых разложений. Проведено сравнение полученного приближенного аналитического решения с тестовым, исследована погрешность определения прогиба пластины. Установлено, что при использовании граничной функции шестого порядка и только одного члена у косинусов и одного члена у синусов в рядах Фурье в универсальных быстрых разложениях точность полученного решения значительно превышает точность задания входных параметров задачи, определяемой концепцией сплошной среды. В этом случае приближенное аналитическое решение формально можно считать точным.

Abstract. The problem is solved in analytical form using the method of universal fast expansions. The obtained approximate analytical solution is compared with the test one, the error in determining the plate deflection is investigated. It is found that when using a sixth-order boundary function and only one term in the cosines and one term in the sines in the Fourier series in universal fast expansions, the accuracy of the obtained solution significantly exceeds the accuracy of specifying the input parameters of the problem determined by the concept of a continuous medium. In this case, the approximate analytical solution can formally be considered exact.

Ключевые слова: пластина, бигармоническое уравнение, прогиб, крутящий и изгибающие моменты, перерезывающие силы, компоненты тензора напряжений, универсальные быстрые разложения, высокая точность.

Keywords: plate, biharmonic equation, deflection, torsional and bending moments, shear forces, stress tensor components, universal fast expansions, high accuracy.

Уравнения равновесия для прямоугольной пластины на упругом основании запишем в виде неоднородного бигармонического уравнения [1]

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{\kappa_0}{D} w = \frac{q(x, y)}{D}, \quad (x, y) \in \Omega_{\square} \left(x \in [-a, a], y \in [-b, b] \right). \quad (1)$$

Здесь $w(x, y)$ - вертикальное перемещение пластины, $q(x, y)$ – переменная поперечная нагрузка на поверхность, κ_0 – коэффициент упругой постели, D – цилиндрическая жесткость пластины, вычисляемая по формуле $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$, где h – толщина пластины, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона.

На границах пластины Γ_{\square} зададим $w(x, y)$ и нормальные к Γ_{\square} производные

$$\begin{aligned} w|_{x=-a} &= \varphi_1(y), \quad w|_{y=-b} = \varphi_2(x), \quad w|_{x=a} = \varphi_3(y), \quad w|_{y=b} = \varphi_4(x), \\ \frac{\partial w}{\partial x}\Big|_{x=-a} &= \psi_1(y), \quad \frac{\partial w}{\partial y}\Big|_{y=-b} = \psi_2(x), \quad \frac{\partial w}{\partial x}\Big|_{x=a} = \psi_3(y), \quad \frac{\partial w}{\partial y}\Big|_{y=b} = \psi_4(x), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\left(\begin{array}{l} w(x, y), \varphi_1(y), \varphi_3(y), \varphi_2(x), \varphi_4(x), \\ \psi_1(y), \psi_3(y), \psi_2(x), \psi_4(x), q(x, y) \end{array} \right) \in C^{(8)}(\Omega_{\square}), \quad (x, y) \in \Omega_{\square}.$$

Граничные условия (2) означают, что на Γ_{\square} задано вертикальное смещение материальных точек пластины и упругий поворот краев пластины. Подобные задачи особенно сложны из-за присутствия в них производных как четного, так и нечетного порядков. Входными данными являются размеры пластины (a, b) и функции на границе:

$$\varphi_i, \psi_i, \quad i = 1 \div 4. \quad (3)$$

При рассмотрении многомерных задач для получения аналитического гладкого решения возникает проблема согласования входных данных задачи (3). Уравнения совместности получаются после следующих рассуждений. Из непрерывности перемещений в угловых точках пластины получаем первые четыре условия совместности

$$\begin{aligned} w(-a, -b) &= \varphi_1(-b) = \varphi_2(-a), \quad w(a, -b) = \varphi_2(a) = \varphi_3(-b), \\ w(a, b) &= \varphi_3(b) = \varphi_4(a), \quad w(-a, b) = \varphi_4(-a) = \varphi_1(b). \end{aligned} \quad (4)$$

Кроме (4) в угловых точках должны выполняться условия непрерывности вторых смешанных производных

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \Big|_{x=-a, y=-b} &= \psi'_1(-b) = \psi'_2(-a), & \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \Big|_{x=a, y=-b} &= \psi'_3(-b) = \psi'_2(a), \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \Big|_{x=a, y=b} &= \psi'_3(b) = \psi'_4(a), & \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \Big|_{x=-a, y=b} &= \psi'_1(b) = \psi'_4(-a). \end{aligned} \quad (5)$$

Штрихом в (5) обозначены производные по той переменной, от которой зависит соответственная функция.

К условиям совместности (4) и (5) добавим условия, связывающие производные от функций для перемещений, заданных в (2), с функциями для производных по нормали к границе Γ_{\square} от перемещений из (2), т.е.

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{x=-a, y=-b} &= \frac{d\varphi_1(y)}{dy} \Big|_{y=-b} = \psi_2(-a), & \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{x=a, y=-b} &= \frac{d\varphi_3(y)}{dy} \Big|_{y=-b} = \psi_2(a), \\ \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{x=a, y=b} &= \frac{d\varphi_3(y)}{dy} \Big|_{y=b} = \psi_4(a), & \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{x=-a, y=b} &= \frac{d\varphi_1(y)}{dy} \Big|_{y=b} = \psi_4(-a), \\ \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=-a, y=-b} &= \frac{d\varphi_2(x)}{dx} \Big|_{x=-a} = \psi_1(-b), & \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=a, y=-b} &= \frac{d\varphi_2(x)}{dx} \Big|_{x=a} = \psi_3(-b), \\ \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=a, y=b} &= \frac{d\varphi_4(y)}{dy} \Big|_{y=b} = \psi_3(b), & \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=-a, y=b} &= \frac{d\varphi_4(x)}{dx} \Big|_{y=b} = \psi_1(b). \end{aligned} \quad (6)$$

Равенства (4) - (6) будем называть условиями совместности граничных условий. Если же хотя бы одно из условий (4) - (6) не выполняется, то в углах будем иметь разрывы и тогда нельзя будет дифференцировать ряды Фурье для разрывных функций, т.е. нельзя их будет подставлять в дифференциальное уравнение равновесия упругой пластины (1). В дальнейшем будем полагать, что все условия согласований (4) - (6) выполнены. Критерием существования невыполненных условий совместности является большая неустранимая погрешность в угловых точках.

Неизвестное перемещение $w(x, y)$ представим универсальным быстрым разложением [2] с граничной функцией не ниже четвертого порядка, так как дифференциальное уравнение (1) равновесия пластины имеет четвертый порядок

$$w(x, y) = M_6(x, y) + a_0(y) + \sum_{m=1}^{N_1-1} \left(a_m(y) \cos m\pi \frac{x}{a} + b_m(y) \sin m\pi \frac{x}{a} \right). \quad (7)$$

Здесь $N_1 - 1$ – количество членов в ряде Фурье, граничная функция $M_6(x, y)$ имеет вид

$$M_6(x, y) = \sum_{q=0}^6 A_q(y) P_q(x), \quad (8)$$

где $A_q(y)$ некоторые функции от переменной y , $P_q(x)$ специального вида полиномы от переменной x [2]

$$\begin{aligned} P_0(x) &= \frac{x}{2a}, \quad P_1(x) = \frac{x^2}{4a}, \quad P_2(x) = \frac{x^3}{12a} - \frac{ax}{12}, \quad P_3(x) = \frac{x^4}{48a} - \frac{ax^2}{24}, \\ P_4(x) &= \frac{x^5}{240a} - \frac{ax^3}{72} + \frac{7a^3x}{720}, \quad P_5(x) = \frac{x^6}{1440a} - \frac{ax^4}{288} + \frac{7a^3x^2}{1440}, \\ P_6(x) &= \frac{1}{1440} \left(\frac{x^7}{7a} - ax^5 + \frac{7a^3x^3}{3} - \frac{31a^5x}{21} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

В (7) коэффициенты a_0, a_m, b_m вычисляются интегральными формулами Фурье по переменной x . Функции $A_q(y)$ находятся из выражения [2]

$$A_q(y) = w^{(q)}(a, y) - w^{(q)}(-a, y), \quad q = 0 \div 6. \quad (10)$$

Равенство (10) удобно использовать, когда производные $w^{(q)}(\pm a, y)$ на концах отрезка $[-a, a]$ известны, т.е. когда $w(x, y)$ известная функция, либо $A_q(y)$ находится из граничных условий, либо из ДУ равновесия пластины. Формула (10) может быть модифицирована к более совершенному виду

$$A_q(y) = w^{(q)}(a(1-\varepsilon), y) - w^{(q)}(-a(1-\varepsilon), y), \quad q = 0 \div 6. \quad (11)$$

где ε – малая величина, которую следует задавать произвольно, но меньше погрешности используемых физических величин, определяемых концепцией сплошности среды.

Разложение (7) позволяет свести задачу с двумя переменными (x, y) к задаче о нахождении коэффициентов $A_0 \div A_6, a_0, a_m, b_m, m = 1 \div N_1 - 1$ с одной переменной y . Для этого подставим быстрое разложение (7) в граничные условия (2) и дифференциальное уравнение (1). Из граничных условий (2) найдем неизвестные $A_0 \div A_3$. Для определения остальных неизвестных функций получим замкнутую систему $4 + 2(N_1 - 1)$ дифференциальных уравнений 4-го порядка каждое. Далее каждую из неизвестных функций представим универсальным быстрым разложением по переменной y с граничной функцией шестого порядка

$$\begin{aligned}
A_{4j}(y) &= W_{A0j} \frac{y}{2b} + W_{A1j} \frac{y^2}{4b} + W_{A2j} \frac{1}{12} \left(\frac{y^3}{b} - by \right) + W_{A3j} \frac{1}{12} \left(\frac{y^4}{4b} - b \frac{y^2}{2} \right) + \\
&+ W_{A4j} \frac{1}{24} \left(\frac{y^5}{10b} - b \frac{y^3}{3} + y \frac{7b^3}{30} \right) + w_{A0j} + \sum_{n=1}^{N_2-1} c_{Ajn} \cos n\pi \frac{y}{b} + \sum_{n=1}^{N_2-1} s_{Ajn} \sin n\pi \frac{y}{b} + \\
&+ W_{A5j} \left(\frac{y^6}{1440b} - \frac{by^4}{288} + \frac{7b^3y^2}{1440} \right) + W_{A6j} \left(\frac{y^7}{7b} - by^5 + \frac{7b^3y^3}{3} - \frac{31b^5y}{21} \right), \quad j = 4 \div 6, \\
a_0(y) &= W_0 \frac{y}{2b} + W_1 \frac{y^2}{4b} + W_2 \frac{1}{12} \left(\frac{y^3}{b} - by \right) + W_3 \frac{1}{12} \left(\frac{y^4}{4b} - b \frac{y^2}{2} \right) + \\
&+ W_4 \frac{1}{24} \left(\frac{y^5}{10b} - b \frac{y^3}{3} + y \frac{7b^3}{30} \right) + w_0 + \sum_{n=1}^{N_2-1} c_n \cos n\pi \frac{y}{b} + \sum_{n=1}^{N_2-1} s_n \sin n\pi \frac{y}{b} + \\
&+ W_5 \left(\frac{y^6}{1440b} - \frac{by^4}{288} + \frac{7b^3y^2}{1440} \right) + W_6 \left(\frac{y^7}{7b} - by^5 + \frac{7b^3y^3}{3} - \frac{31b^5y}{21} \right), \\
a_m(y) &= A_{0m} \frac{y}{2b} + A_{1m} \frac{y^2}{4b} + A_{2m} \frac{1}{12} \left(\frac{y^3}{b} - by \right) + A_{3m} \frac{1}{12} \left(\frac{y^4}{4b} - b \frac{y^2}{2} \right) + \\
&+ A_{4m} \frac{1}{24} \left(\frac{y^5}{10b} - b \frac{y^3}{3} + y \frac{7b^3}{30} \right) + a_{0m} + \sum_{n=1}^{N_2-1} c_{am,n} \cos n\pi \frac{y}{b} + \sum_{n=1}^{N_2-1} s_{am,n} \sin n\pi \frac{y}{b} +
\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
& + A_{5m} \left(\frac{y^6}{1440b} - \frac{by^4}{288} + \frac{7b^3y^2}{1440} \right) + A_{6m} \left(\frac{y^7}{7b} - by^5 + \frac{7b^3y^3}{3} - \frac{31b^5y}{21} \right), \\
b_m(y) = & B_{0m} \frac{y}{2b} + B_{1m} \frac{y^2}{4b} + B_{2m} \frac{1}{12} \left(\frac{y^3}{b} - by \right) + B_{3m} \frac{1}{12} \left(\frac{y^4}{4b} - b \frac{y^2}{2} \right) + \\
& + B_{4m} \frac{1}{24} \left(\frac{y^5}{10b} - b \frac{y^3}{3} + y \frac{7b^3}{30} \right) + b_{0m} + \sum_{n=1}^{N_2-1} c_{bm,n} \cos n\pi \frac{y}{b} + \sum_{n=1}^{N_2-1} s_{bm,n} \sin n\pi \frac{y}{b} + \\
& + B_{5m} \left(\frac{y^6}{1440b} - \frac{by^4}{288} + \frac{7b^3y^2}{1440} \right) + B_{6m} \left(\frac{y^7}{7b} - by^5 + \frac{7b^3y^3}{3} - \frac{31b^5y}{21} \right), \quad m = 1 \div N_1 - 1.
\end{aligned}$$

В (12) $N_2 - 1$ - количество членов в ряде Фурье по переменной y . Представление неизвестных функций в виде (12) позволяет вычислять производные от них до шестого порядка включительно на всем отрезке $y \in [-b, b]$, включая и границу. Таким образом, решение задачи сводится к нахождению $(4 + 2(N_1 - 1)) \cdot (8 + 2(N_2 - 1))$ постоянных коэффициентов, определяющих неизвестные функции. Для их нахождения составим линейную алгебраическую систему из $(4 + 2(N_1 - 1)) \cdot (8 + 2(N_2 - 1))$ уравнений и решаем ее в программе Maple. Решение линейной алгебраической системы подставляем в повторные быстрые разложения (12), а затем в разложение (7). В итоге имеем приближенное аналитическое решение задачи (1), (2).

Решение задачи (1), (2) можно представить в явном виде, если задать функции $q(x, y)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_4(x)$, $\psi_2(x)$, $\psi_4(x)$, $x \in [-a, a]$. В качестве примера функции из (2) зададим следующим образом

$$\begin{aligned}
\varphi_1(y) = \varphi_3(y) = \varphi_2(x) = \varphi_4(x) &= 0, \\
\psi_1(y) = 2Qa(y^2 - b^2)e^{(y-a)/3}, \quad \psi_3(y) &= -2Qa(y^2 - b^2)e^{(y+a)/3}, \\
\psi_2(x) = 2Qb(x^2 - a^2)e^{(x-b)/3}, \quad \psi_4(x) &= -2Qb(x^2 - a^2)e^{(x+b)/3},
\end{aligned} \tag{13}$$

где Q – некоторая константа.

Нагрузку $q(x, y)$ в (1) запишем выражением

$$q(x, y) = -\left(\frac{D}{9}\left(\frac{16}{3}(y^2 - b^2)(x + 3) + \frac{16}{3}(x^2 - a^2)(y + 3) + \frac{4}{9}(x^2 - a^2)(y^2 - b^2) + 8(2y + 3)(2x + 3) + \kappa_0(x^2 - a^2)(y^2 - b^2)\right)\right) Qe^{(x+y)/3}. \quad (14)$$

Зависимости (13) и (14) подобраны так, что выполняются все условия совместности (4) – (6). В данном случае задача (1), (2) имеет точное решение

$$w(x, y) = -Q(x^2 - a^2)(y^2 - b^2)e^{(x+y)/3} \quad (15)$$

Точное решение (15) позволяет исследовать погрешность решения краевой задачи (1), (2) путем сравнения с приближенным аналитическим решением (15), полученным методом универсальных быстрых разложений.

В вычислительных экспериментах, согласно оценкам, приведенных в [3,4], возьмем в рядах Фурье по одному члену u косинусов и u синусов, т.е. $N_1 = N_2 = 2$. Прогиб $w(x, y)$ пластины рассчитаем по формуле (7), а изгибающие и крутящий моменты, перерезывающие силы и компоненты напряжений вычислим по формулам [1]

$$M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \quad M_y = -D\left(\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \quad M_{xy} = -M_{yx} = D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (15)$$

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right). \quad (16)$$

$$\tau_{xz} = \frac{3}{2} \frac{Q_x}{h}, \quad \tau_{yz} = \frac{3}{2} \frac{Q_y}{h}, \quad \tau_{xy} = 6 \frac{M_{xy}}{h^2}, \quad \sigma_x = 6 \frac{M_x}{h^2}, \quad \sigma_y = 6 \frac{M_y}{h^2}. \quad (17)$$

Относительную погрешность прогиба (7), изгибающих и крутящих моментов (15), перерезывающих сил (16) и компонент напряжений (17), будем вычислять по формуле

$$\delta = |\Delta| / f_{\max} \cdot 100\%.$$

где Δ – абсолютная погрешность, f_{\max} – максимальное значение исследуемого объекта.

Вычисления будем проводить при значениях $\kappa_0 = 10000$, $E = 10^{10}$, $\nu = 0.3$, $Q = 10^{-3}$, $\varepsilon = 10^{-10}$ м, $a = 1$ м, $b = 1$ м, $h = 0.05$ м. Прогиб $w(x, y)$ пластины, рассчитанный по формуле (7), изображен на рис. 1. Прогиб имеет плоскость симметрии, проходящую через диагональ квадрата с наиболее нагруженной вершиной. Максимальный прогиб пластины под нагрузкой (14) будет находиться не в центре, как при равномерном нагружении пластины, а смещен вдоль плоскости симметрии в сторону самой нагруженной вершины. Относительная погрешность вычислений прогиба $w(x, y)$ по сравнению с точным решением (15) показана на рис. 2. Из рис. 2 видно, что погрешность на границах области равна нулю, а максимальная погрешность достигается внутри области. Максимальный порядок относительной погрешности составляет $10^{-3}\%$.

На рис. 3 представлены распределения компонент напряжений в пластине. Из рис. 3а и рис. 3б видно, что в углах пластины $\sigma_x = \sigma_y = 0$. Наибольшее значение σ_x и σ_y достигается на сторонах $x = a$ и $y = b$ соответственно. Точки с максимальным значением σ_x и σ_y , расположены между серединами этих сторон и точкой $(a; b)$. В отличие от нормальных напряжений σ_x и σ_y касательные напряжения τ_{xz} , τ_{yz} и τ_{xy} , принимают свои максимальные значения не на сторонах, а в точке $(a; b)$ пластины (рис. 3в, рис. 3г и рис. 3д). Также из рис. 3 можно сделать вывод, что в прямоугольной пластине при нагрузке вида (14) из всех касательных напряжений наибольшее значение имеет τ_{xy} , которое на два порядка превосходят значения касательных напряжений τ_{xz} и τ_{yz} .

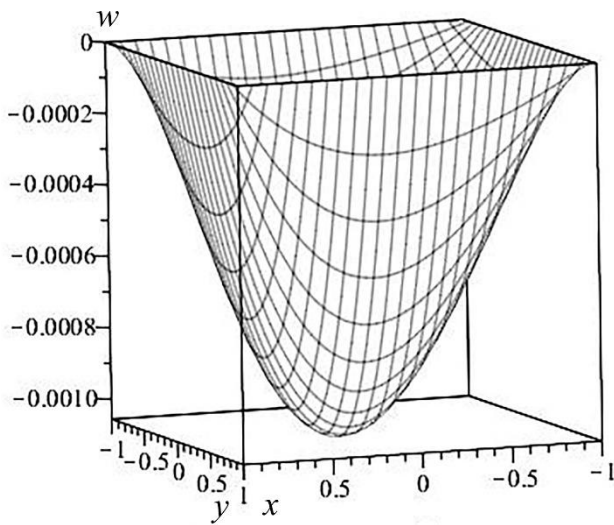


Рис. 1. Прогиб $w(x, y)$ пластины, рассчитанный по формуле (7)

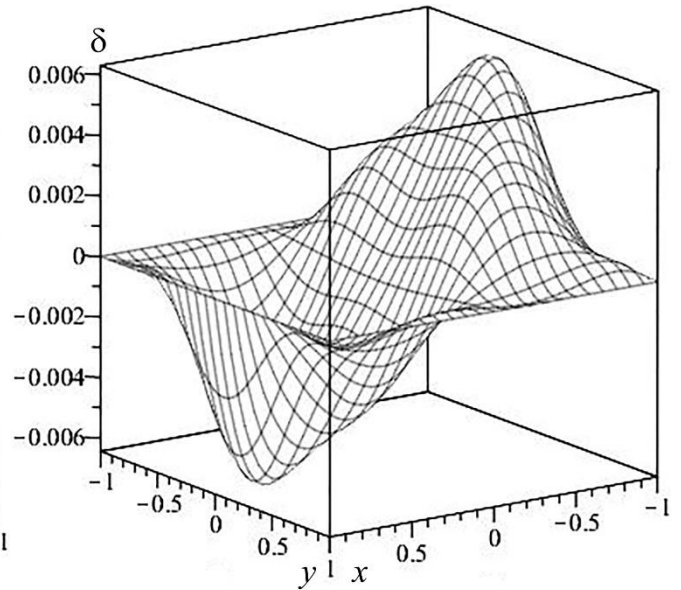
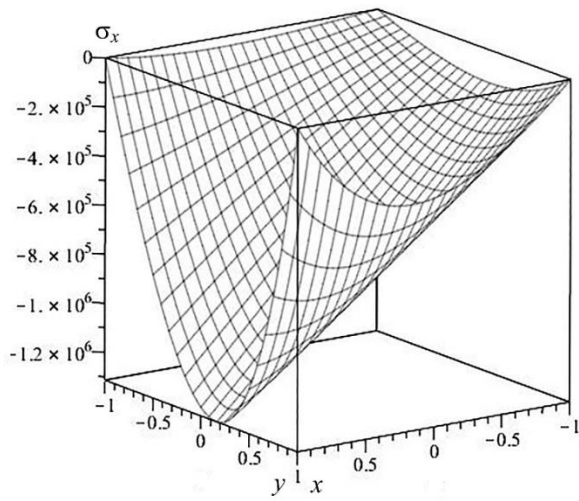
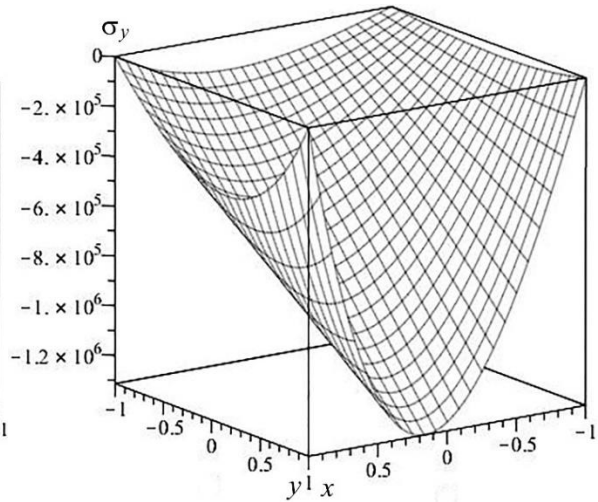


Рис. 2. Относительная погрешность вычислений прогиба в сравнении с точным решением (15)

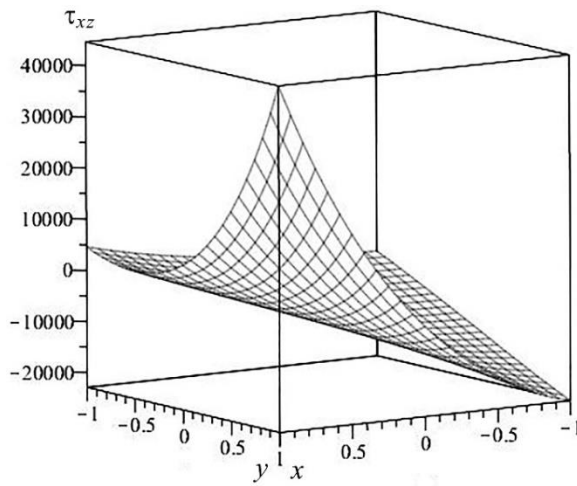
В заключении отметим, что универсальные быстрые разложения также эффективны как и быстрые синус-разложения, апробированные в работах [5-8]. При использовании в универсальных быстрых разложениях граничной функции шестого порядка достаточно учитывать в рядах Фурье один член у косинусов и один у синусов. Максимальный порядок относительной погрешности расчета прогиба пластины составит $10^{-3}\%$. Подобная малая погрешность позволяет формально считать полученное в статье приближенное аналитическое решение точным.



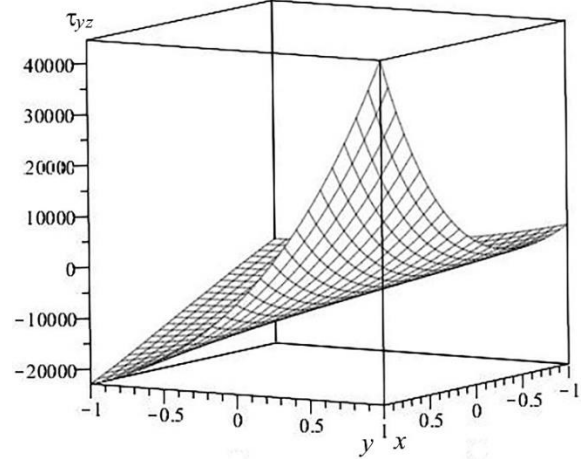
а)



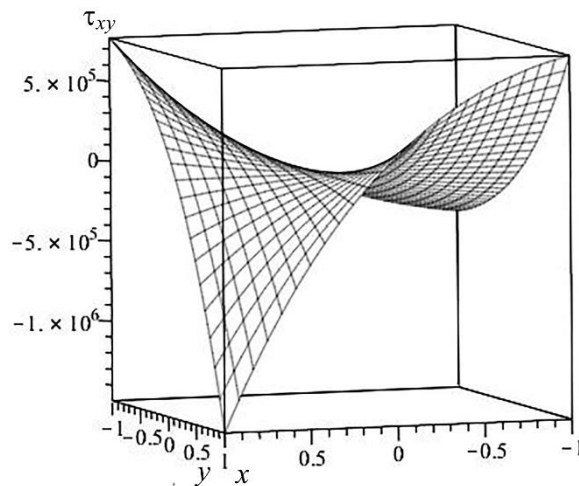
б)



в)



г)



д)

Рис. 3. Распределение компонент напряжений в пластине:

а) σ_x , б) σ_y , в) τ_{xz} , г) τ_{yz} , д) τ_{xy}

Полученное аналитическое решение при задании нагрузки на пластину и условий закрепления краев позволяет вычислить в любой точке перемещение, крутящий и изгибающие моменты, перерезывающие силы и компоненты тензора напряжений. Проведенные расчеты напряжений в прямоугольной пластине под действием специальной переменной нагрузки показали, что максимальные значения касательные напряжения τ_{xz} , τ_{yz} и τ_{xy} достигаются в точке $(a;b)$, а максимальные значения нормальных напряжений σ_x и σ_y достигаются на сторонах $x = a$ и $y = b$ соответственно и расположены между серединами этих сторон и точкой $(a;b)$.

Список литературы

1. Тимошенко С.П. Пластины и оболочки / С.П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер – М.: Наука. 1966. 636 с.
2. Chernyshov A.D. Universal fast expansion for solving nonlinear problems / A.D. Chernyshov, D.S. Saiko, E.N. Kovaleva// Journal of Physics: Conference Series. 2020. P. 012147.
3. Чернышов А.Д. Универсальные быстрые тригонометрические интерполяции для интегро-дифференциальных задач различного порядка / А.Д. Чернышов, О.Ю. Никифорова, В.В. Горяйнов, С.Ф. Кузнецов, И.Г. Рукин // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2022. № 4 (54). С. 57-70.
4. Чернышов А.Д. Применение универсальной быстрой тригонометрической интерполяции и экстраполяции для определения координат точки запуска летательного аппарата/ А.Д. Чернышов, О.Ю. Никифорова, В.В. Горяйнов, И.Г. Рукин //Журнал вычислительной математики и математической физики. 2024. Т. 64. № 7. С. 1183-1195.

5. Чернышов А.Д. Решение задачи о контактном тепловом сопротивлении между сжатыми шарами методом быстрых разложений / А.Д. Чернышов, В.М. Попов, А.С. Шахов, В.В. Горяйнов, А.П. Новиков // Тепловые процессы в технике. – 2012. – Т. 4. № 12. – С. 544-552.

6. Чернышов А.Д. Температурный режим при естественной конвекции термовязкой несжимаемой жидкости в емкости прямоугольной формы / А.Д. Чернышов, А.Н. Марченко, В.В. Горяйнов // Тепловые процессы в технике. – 2012. – Т. 4. № 11. – С. 482-486.

7. Чернышов А.Д. Решение одного нелинейного интегродифференциального уравнения методом быстрых разложений/ А.Д. Чернышов, В.В. Горяйнов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2012. № 4 (14). С. 105-112.

8. Попов В.М. Повышенная точность решения задачи о контактном термосопротивлении между сжатыми шарами методом быстрых разложений / В.М. Попов, А.С. Шахов, В.В. Горяйнов, О.А. Чернышов, А.П. Новиков // Тепловые процессы в технике. – 2014. – Т. 6. № 4. – С. 179-191.

References

1. Timoshenko S.P. Theory of plates and shells/ S.P. Timoshenko, S. Woinowsky-Krieger. – New York: McGraw-Hill, 1959

2. Chernyshov A.D. Universal fast expansion for solving nonlinear problems / A.D. Chernyshov, D.S. Saiko, E.N. Kovaleva // Journal of Physics: Conference Series. 2020. P. 012147.

3. Chernyshov A. D. Universal fast trigonometric interpolations for integro-differential problems of various orders / A. D. Chernyshov, O. Yu. Nikiforova, V. V. Goryainov, S. F. Kuznetsov, I. G. Rukin // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University named after I. Ya. Yakovlev. Series: Limit State Mechanics. 2022. No. 4 (54). P. 57-70.

4. Chernyshov A.D. Application of universal fast trigonometric interpolation and extrapolation for determining the launch point coordinates of a flight vehicle / A. D. Chernyshov, O. Yu. Nikiforova, V. V. Goryainov, I. G. Rukin // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2024. Vol. 64, Is. 7. P. 1461-1471.

5. Chernyshov A.D. Solution of the problem of contact thermal resistance between compressed spheres by the method of fast expansions / A.D. Chernyshov, V.M. Popov, A.S. Shakhov, V.V. Goryainov, A.P. Novikov // Thermal processes in engineering. - 2012. - V. 4. No. 12. - P. 544-552.

6. Chernyshov A.D. Temperature regime during natural convection of a thermoviscous incompressible fluid in a rectangular container / A.D. Chernyshov, A.N. Marchenko, V.V. Goryainov // Thermal processes in engineering. - 2012. - Vol. 4. No. 11. - P. 482-486.

7. Chernyshov A.D. Solution of one nonlinear integro-differential equation by the fast expansion method / A.D. Chernyshov, V.V. Goryainov // Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University named after I. Ya. Yakovlev. Series: Limit State Mechanics. 2012. No. 4 (14). P. 105-112.

8. Popov V.M. Increased accuracy of solving the problem of contact thermal resistance between compressed spheres using the fast expansion method / V. M. Popov, A. S. Shakhov, V. V. Goryainov, O. A. Chernyshov, A. P. Novikov // Thermal processes in engineering. - 2014. - Vol. 6. No. 4. - P. 179-191.

Научное издание

ОПЕРАТОРНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕКОТОРЫЕ СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ
В ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКЕ

Материалы Международной открытой конференции

Воронеж, 21-23 апреля 2025 г.

Ответственный редактор В.В. Зенина

Материалы издаются в авторской редакции

Подписано к изданию 09.12.2025. Объем данных 17,7 Мб
ФГБОУ ВО «Воронежский государственный лесотехнический университет
имени Г.Ф. Морозова»
394087, г. Воронеж, ул. Тимирязева, 8